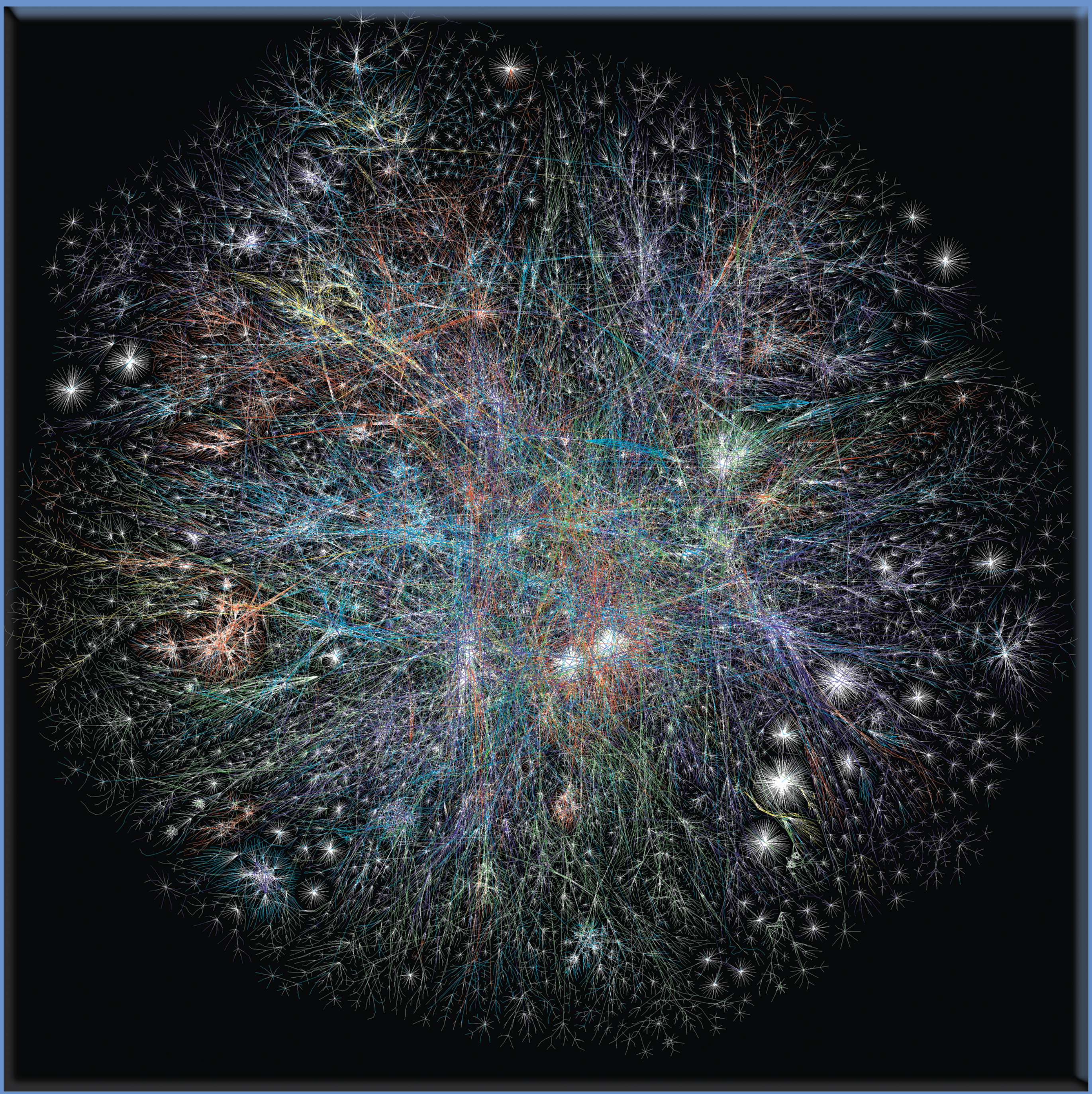
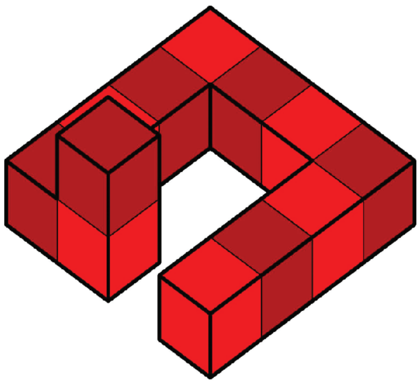
ISSN 0130-2221
ИЮЛЬ/АВГУСТ
2012 • №4

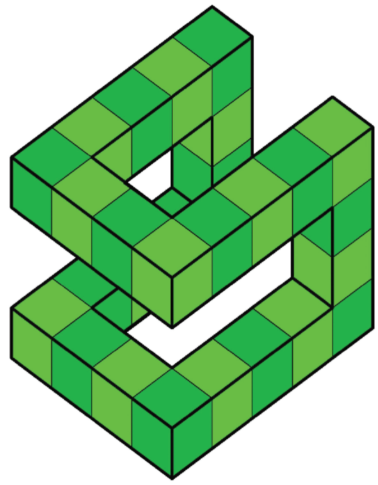
# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





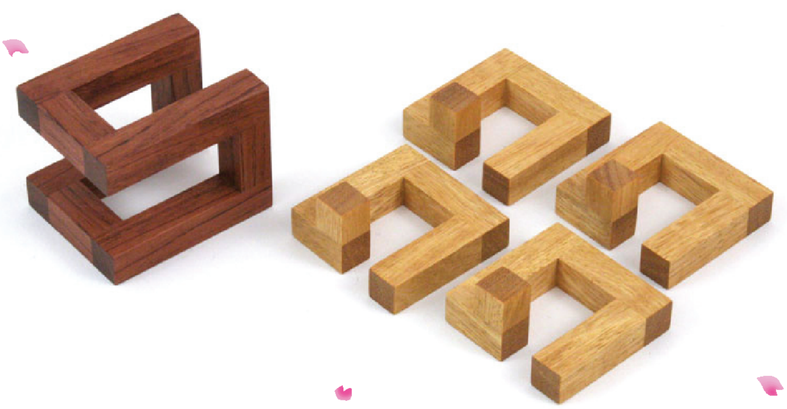
日本の謎々



# НЕОБЫЧНАЯ ГОЛОВОЛОМКА НА УПАКОВКУ

В этой головоломке Осанори Ямамото (Osanori Yamamoto) всего пять деталей, они изображены на фотографии внизу. Требуется сложить их все так, чтобы получившаяся фигура снаружи выглядела как прямоугольный параллелепипед. Другими словами, представим себе коробку, которая плотно ограничивает бóльшую деталь, – в нее и нужно «упаковать» все части. В этом заключается необычность задачи: коробка не настоящая, а воображаемая. «Схема» вверху поможет вам смастерить эту головоломку самостоятельно. Желаем успеха!

*Е.Епифанов*



# КВАНТ

ИЮЛЬ АВГУСТ 2012 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

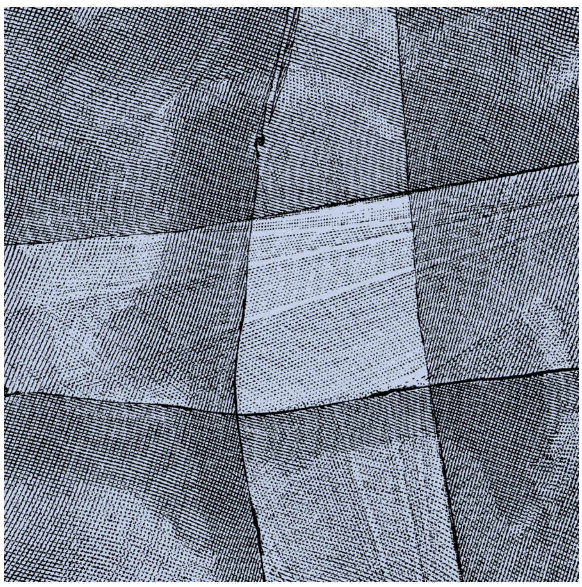

## В номере:

# На берегу океана непознанного: иллюзия простоты

**М.КАГАНОВ**

*Памяти Л.Н.Розенцвейга*

НЕДАВНО Я ВСПОМНИЛ ГЕНРИХА МОРЕПЛАвателя. Был в XV веке такой португальский принц, о котором я узнал в школьные годы, читая о великих географических открытиях. Получил он свое прозвище, никогда не принимая участия в морских походах. В течение сорока лет принц снаряжал и посылал многочисленные морские экспедиции. Для этого он основал обсерваторию, открыл мореходную школу и построил верфь для строительства каравелл – своеобразный форпост на юго-западной оконечности Португалии. Отсюда естественно было начинать путь туда, куда направлялись посылаемые им суда, – на юг вдоль атлантических берегов Африки. Детище Генриха Мореплавателя получило название Вилла-до-Инфанте. Он был третьим сыном короля Португалии Жоана I. Вилла стала центром притяжения для видных ученых, картографов и астрономов того времени.



О Генрихе Мореплавателе я вспомнил, когда читал переведенные на русский язык научно-популярные книги по физике. Задумался и решил, что физика, почти как всегда и как во времена Ньютона, находится на берегу океана непознанного. В моем юношеском сознании Генрих Мореплаватель остался одним из тех, кто стремился к знанию. Его помыслы мне были неизвестны. Желая себя проверить, заглянул в интернет. Я не ошибся. Он стремился узнать, *что* есть там, где не побывал ни один европеец до отправленных им экспедиций. Его помыслы, как и следовало ожидать, были меркантильны. Им, точнее его экспедициями, были сделаны первые шаги по пути формирования мощной колониальной империи Португалии. Посланцы Генриха Мореплавателя привозили не только золото, но и первых в истории Европы черных рабов. Но у Генриха Мореплавателя была и жажда знаний. Великие географические открытия, предвозвестником которых он, несомненно, был, совершались после его смерти. Даже до открытия мыса Доброй Надежды не дожил любознательный инфант.

О Генрихе Мореплавателе, по-моему, не следует забывать, думая о сложном многовековом пути познания Мира человечеством. Поэтому, пытаясь поделиться своими мыслями о проблемах, обозначенных довольно точно названием статьи, я выбрал упоминание о Генрихе Мореплавателе в виде преамбулы.

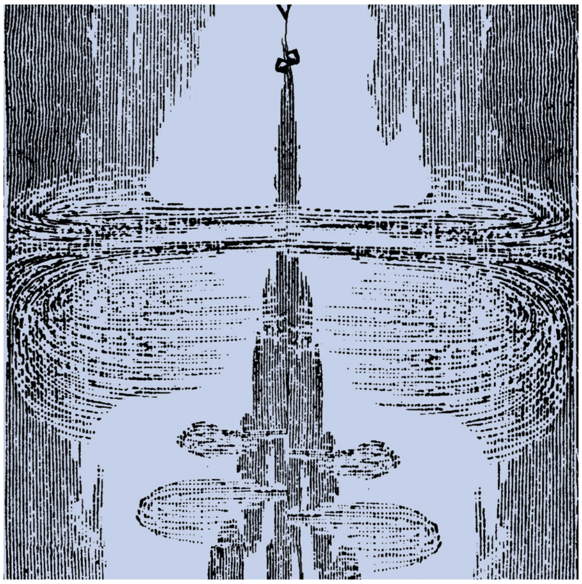
* * *

Береговая черта океана непознанного – явное свидетельство существования материка познанного. Современная наука приводит к непрерывному росту размеров этого материка, сдвигает береговую черту и изменяет ее форму. При этом рост материка познанного сопровождается ростом океана непознанного, приводя к пониманию того, *что теперь требуется постичь*. Требование это жесткое, оно ощутимо научным сообществом: *что* на очереди, диктует логика развития науки.

Наука, даже в пределах физики, о которой только и пойдет речь в этой статье, в настоящее время многообразна. Оставаясь в пределах географической аналогии, надо сказать, что отнюдь не все физики участвуют в экспедициях в океан непознанного или даже трудятся вблизи береговой черты. На материке познанного много белых пятен и недостаточно изученных областей. Логика развития науки требует заполнить знанием белые пятна и составить более детальное представление о том, что (иногда неожиданно) проявило непонятные черты. Без ликвидации белых пятен простая картина Мира, создание которой по мнению Альберта Эйнштейна есть истинная цель науки, не завершена. Кроме того, по словам того же Эйнштейна, большинство ученых не думают о создании простой картины Мира. Они видят свое призвание в открытии новых явлений и свойств, которые могут помочь развитию техники. Их сфера деятельности – белые пятна и плохо исследованные области на материке познанного.

Наука стала дорогой. Между учеными существует конкуренция. Иногда ученые, прогнозирующие сравнительно скорое техническое использование своих будущих результатов, ополчаются против ассигнований на сооружения дорогих гигантских ускорителей и не менее дорогих приборов для получения надежных сведений из далеких областей Вселенной, хотя все понимают, что без них нельзя проникнуть в океан непознанного. Думаю, и с Генрихом Мореплавателем спорили, добиваясь, чтобы он выделял деньги не только на новые морские экспедиции, но и на караваны, следующие известными маршрутами.

Деление физики на области, существующие на первый взгляд независимо, не ликвидирует ее единства. Физика твердого тела невозможна без атомной физики и электродинамики, физическая кинетика служит всем областям физики. Ни одна физическая дисциплина не может обойтись без других. Расположены дисциплины на материке познанного по-разному. Положение дисциплины определяется ее историей, но не всегда. Иногда дисциплина, исторически расположенная в глубине материка познанного, казалось бы, далеко от берега океана непознанного, в своем развитии использует достижения совсем новых дисциплин, место которых либо у самой береговой черты, либо даже в просторах океана непознанного. А бывает, что давно существующая область физики преподносит открытие, место которого вдали от береговой черты – в океане непознанного.



Вот один из примеров. Физика твердого тела и физика магнитных явлений вполне заслуженно давно принадлежат материку познанного, но в каждой есть глава «Ядерный магнетизм», название которой подчеркивает близость к береговой черте. Правда, положение ядерной физики в последние десятилетия определить не так просто. С одной стороны, ядерная физика уже довольно далеко отошла от береговой черты и заняла устойчивое положение на материке познанного. С другой стороны, она не может существовать без физики элементарных частиц. Физика элементарных частиц по идее должна формировать береговую черту. Однако, само понятие *элементарная частица* не неизменно, а следовательно, непросто указать место береговой черты.

Другой пример. Сотрудники американской компании «Белл» Арно Аллан Пензиас и Роберт Вудро Уилсон (Вильсон) в начале 1960-х годов исследовали, почему не удается избавиться от шумов радиоаппаратуры (радиофизика давно находится на материке познанного), и открыли реликтовое излучение, заполняющее Вселенную со времен ее возникновения. Исследование реликтового излучения – одна из возможностей получить сведения из далеких областей океана непознанного, понять, какова была Вселенная в первые мгновения ее возникновения. Неудивительно, что Арно Пензиас и Роберт Уилсон за свое открытие были удостоены Нобелевской премии по физике (1978 г.).

* * *

Написанные мною статьи, обзоры, монографии, прочитанные лекции – все, чем я занимался и в чем принимал личное участие, связано с физикой твердого тела: с физикой металлов и физикой магнитных явлений. Начиная с 30-х годов прошлого века, использование квантовой механики при решении задач макрофизики стало общепринятым, и тем самым физика конденсированного состояния заняла, похоже навсегда, место на материке познанного. Конечно, это не означает, что в этой области нет белых пятен или недостаточно подробно исследованных областей. Не преувеличивая своих заслуг, могу сказать, что вместе со своими учителями и коллегами я принимал участие в ликвидации нескольких белых пятен в теории металлов и в теории магнетизма. Вопросы, о которых идет речь в этой статье, не слишком занимали меня тогда, когда я решал конкретные задачи. Я не задумывался, ликвидирую ли я белое пятно или только выясняю новые черты недоисследованного явления. Мне очень нравилось то, чем я занимался, а тему всегда старался выбрать так, чтобы в результате выяснить нечто новое.

Мои интересы не ограничивались исключительно теми областями физики, в которые я пытался внести свой вклад. К сожалению, физика столь разнообразна, а методы теоретической физики столь сложны, что глубоко знать всю теоретичекую физику я не мог. Похоже, Лев Давидович Ландау и Ричард Фейнман – последние энциклопедисты теоретической физики. Не сравнивая себя с гениями, могу честно признаться, что я знал много физиков-теоретиков, даже в моем непосредственном окружении, с более глубокими и широкими знаниями, чем у меня. Но мне было интересно, *что* происходит и в тех областях, где моего участия вовсе не было. Обзорные статьи и научно-популярная литература помогали знакомиться с тем, что происходило в океане непознанного, а главное, как меняет свои контуры береговая черта материка познанного.

* * *

Хорошо известно, что все окружающее нас состоит из микроскопических частиц. Их научились различать, исследовать, о них накоплено достаточно знаний, чтобы объяснять наблюдаемые явления и существование тел с самыми разными свойствами. Понимание строения материи – одно из основных достижений науки. Микроскопические частицы объединены в структуры разной сложности. Атомы, молекулы, твердые тела – примеры таких структур. Структуры можно расположить по мере их усложнения. Возникает своеобразная лестница уровней, иерархия. Каждая структура имеет определенное место в иерархии, располагается на определенном уровне, как это условно показано в таблице 1.

*Таблица 1*

Вселенная
↑
скопления галактик
↑
галактики
↑
планеты, звезды
↑
макроскопические тела
↑
атомы, ионы, молекулы
↑
ядра атомов, ядерная материя
↑
электроны, протоны, нейтроны

Эта таблица перечисляет объекты, которые изучает физика. Следует заметить, что название *макроскопические тела* выбрано ради стилистического однообразия. Объекты физики – не макроскопические тела или предметы с их устройством, а *вещества*, из которых они образованы (газы, жидкости, кристаллы, аморфные вещества, плазма и даже ядерная материя, из которых состоят некоторые звезды).

По таблице видно, что принадлежащий данному уровню объект состоит из того, что расположено на более низких уровнях. Молекулы состоят из атомов или ионов, атомы – из ядер и электронов, ядра – из протонов и нейтронов. Видно, что не обязательно все объекты нижнего уровня входят в состав объекта с верхнего уровня. Есть тела, состоящие из ионов, а есть тела, в которых ионов в идеале нет совсем, а если случайно там окажется ион, то воспринимается он как примесь. Не всегда для ответа на вопрос, из чего состоит данный объект, надо обращаться к соседнему нижнему уровню. Так, ядерная материя состоит из ядер, а в металлах и в плазме кроме ионов есть электроны, не входящие ни в ионы, ни в нейтральные атомы.

Надо подчеркнуть, что таблица эта не полна. Нет в ней фононов, нейтрино, хотя теперь хорошо известно, что и фононов и нейтрино во Вселенной очень много. Строго говоря, их надо поместить на нижний уровень. Мною руководило желание зафиксировать здесь те объекты, которые помогают ответить на вопрос, из чего состоит то, что нас окружает, то, что непосредственно мы ощущаем, что используем. Мы убедимся ниже, что опущены не только фононы и нейтрино.

Отсутствие уровней под уровнем «электроны, протоны, нейтроны» означает, что при составлении схемы принято электроны, протоны и нейтроны считать *элементарными*. Как известно, нейтрон нестабилен, время жизни его в свободном состоянии около 15 минут. Нейтрон превращается в протон, электрон и нейтрино. Так как в нерадиоактивных ядрах нейтрон стабилен, а по атомно-ядерным масштабам времени 15 минут это по сути бесконечность, то наравне с протоном его можно считать таким же элементарным. Нередко сходство протона и нейтрона подчеркивают и называют обе частицы *нуклонами*. Обрыв схемы на нуклонно-электронном уровне уже несколько устарел. Строго говоря, под ним есть еще один – *кварковый*. Но об этом будет сказано потом.

Ядра и ядерная материя выделены в отдельный уровень. Все ядра, кроме ядра атома водорода, – сложные структуры, состоящие из нуклонов. Тяжелые ядра при их субмикроскопическом размере напоминают макроскопические тела. Успех имела глубокая аналогия ядра урана с каплей жидкости, позволившая понять природу распада ядра урана под воздействием нейтронов. Но ядерная материя существует и в поистине макроскопических масштабах. Она заполняет внутренние области звезд. Открыты нейтронные звезды, которые целиком состоят из нейтронов.

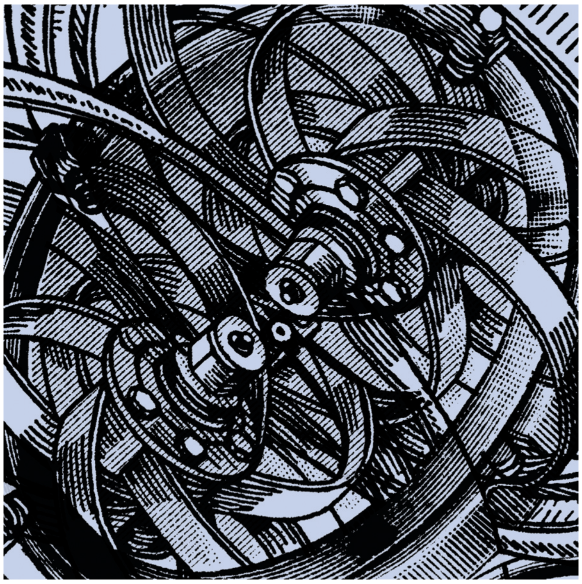
Схему завершает Вселенная. В последние десятилетия Вселенная целиком, как некая структура, изменяющаяся с ходом времени, – объект изучения физики.

Не укладываются в приведенную схему пространство и время. До работ Эйнштейна в начале XX века пространство и время не были, строго говоря, физическими объектами. Большинством физиков они воспринимались априорными понятиями, существующими для описания всего, что есть и происходит в Мире. Объединив пространство и время в четырехмерное пространство-время и показав, что его геометрия зависит от существующей в нем материи, Эйнштейн «перенес» пространство и время из умозрительной философии в физику. Заняв в ней прочное место, они стали объектом внимательного анализа, но, как оказалось, на карте науки их постигла необычная судьба. Экспериментальное подтверждение удивительных предсказаний Эйнштейна, таких как искривление луча света или изменение хода времени, казалось, навечно поместило новые для физики объекты на материке познанного. Но требования к глубине понимания растут неудержимо. Ситуация изменилась: пространство-время сейчас далеко в океане непознанного. Это произошло не потому, что выяснилась ошибочность эйнштейновских теорий. Нет! Они безукоризненно описывают тот круг явлений, для понимания которых были созданы. Однако понимание фундаментальной роли квантовой механики изменило наши требования. Логика развития субатомной физики потребовала построения квантовой теории гравитации. Пока это не удается. И похоже, что до понимания далеко. Предстоят увлекательные экспедиции по океану непознанного. Но об этом позже...

* * *

Знание того, из чего состоит все в природе, не является самоцелью. Оно *необходимо* для понимания всего, что нас окружает: свойств тел и веществ, из которых они состоят, природных явлений любого масштаба и результатов самых разных экспериментов. Необходимо, но *не достаточно*. Заведомо нужно знать те законы, которые управляют поведением соответствующих объектов. Изучение объектов каждого уровня привело к открытию и/или выводу различных законов и правил, свойственных объектам каждого уровня. Нет договоренности, какие из утверждений, формулировок, правил именовать законами. Законов очень много, пожалуй даже слишком. Одна из трудностей изучения физики (и, признаюсь, преподавания ее) – в необходимости знать их или, что даже важнее, знать, что они существуют, и при необходимости уметь эти законы вспоминать или выводить, понимать, как их использовать, и четко знать границы их применимости. Это особенно важно.

Усложнение объектов снизу вверх по схеме подсказывает: физика ставит себе задачу уметь понять (осмыслить) законы, действующие на любом из уровней, на основе свойств частиц, которые принято считать элементарными. Это выделяет законы, управляющие движением элементарных частиц. Они воспринимаются как *основные законы природы*.



Размер статьи не позволяет описать основные законы природы сколько-нибудь подробно. Ограничимся лишь тем, что назовем разделы современной физики, в которых основные законы формулируются и используются. С их помощью описываются элементарные частицы: их движение, превращение и образование из них всего, что расположено на вышестоящих уровнях. Эти разделы – *квантовая механика* и *теория относительности*, или *релятивистская механика*. Принято отдельно называть *электродинамику*, хотя в применении к элементарным частицам она не столь специфична, как это было, когда механика Ньютона и электродинамика Максвелла исчерпывали основные законы природы. Особняком (надеюсь, только пока) стоит *теория гравитации*. Часто ее называют *общей теорией относительности*. Среди физических объектов есть макроскопические тела, состоящие из огромного количества частиц. Поэтому специфические разделы физики, предназначенные для исследования конгломератов частиц, входят в число основных законов природы. Это *статистическая термодинамика* и *физическая кинетика*. Не удивляйтесь, что мы присоединили их к законам, которые нужны для понимания свойств элементарных частиц. Для этого есть основания. И не только их важность. Оказывается, даже такое, казалось бы, очевидное понятие, как *отдельная частица*, строго говоря, требует пересмотра, когда мы пытаемся добраться до самой сути. И при этом знание законов, управляющих совокупностями частиц, необходимо.

Наверное, у каждого интересующегося устройством Мира есть своя точка зрения на то, какой уровень понимания его удовлетворяет. Я не предполагаю, что все размышляют на эту довольно абстрактную тему, но и интересующихся много. Я принадлежу к их числу. Мне очень хочется, чтобы понимание устройства Мира привело к сравнительно простой картине. Поэтому так заинтересовали меня книги, перечисленные в списке рекомендованных. Все они написаны крупными учеными. Два автора, Стивен Вайнберг и Шелдон Глэшоу – Нобелевские лауреаты по физике. Название книги С.Вайнберга «Мечты об окончательной теории» может служить заглавием ко всему перечню. Обратим внимание, что предполагается одна *окончательная теория* – теория, из которой выводятся все теории, описывающие поведение всех физических объектов на всех уровнях таблицы 1. Забегая несколько вперед, скажу: окончательная теория не создана, хотя, по-видимому, не потеряна надежда на возможность ее построения. Не окажется ли желанная окончательная теория столь неожиданной, что будут утрачены те важные элементы простоты, с которыми мы сроднились, прежде всего – законы сохранения? По-видимому, нет. Современные фундаментальные науки, вопреки такому предположению, не то что опровергают, а обосновывают (выводят) законы сохранения энергии, импульса, заряда.

Выше говорилось, что понимание явлений и свойств *начинается* со знания свойств элементарных частиц. Надеюсь, всем понятно, что использованный глагол «начинаться» здесь не означает, что развитие физики началось с субатомных частиц. Логика структуры современной физики показывает, что, придерживаясь описания от более простого к более сложному, от состоящего из меньшего числа частиц к более крупным объектам, надо начинать снизу и двигаться вверх по стрелкам.

Свойства частиц в какой-то мере можно описать, используя обычный язык, например сказав, что электрон и протон – заряженные частицы и что их заряды одинаковы по величине и противоположны по знаку. Если еще добавить, что это утверждение относится к любой паре электрон-протон, и обобщить сказанное, подчеркнув, что все электроны (как и все протоны) не только имеют одинаковые заряды, но они принципиально неразличимы, то словесное утверждение будет очень важным свойством, не учитывая которое невозможно подняться даже на вторую ступеньку схемы.

Но словесного описания недостаточно. Необходимо знание численных характеристик. Не зная численного значения величины заряда электрона и протона, невозможно построить теорию простейшего атома – атома водорода. Мало того, надо знать значения масс электрона и протона. Построение теории атома – задача квантовой механики. В уравнение квантовой механики (его называют уравнением Шредингера) входит постоянная Планка – еще одно число. Можно построить и релятивистскую теорию движения электрона, но надо при этом воспользоваться уравнением Дирака, а в него, как во все релятивистские формулы, входит скорость света. Но мы еще не перечислили все индивидуальные черты (свойства) электрона. Как ни странно, электрон обладает *собственным* моментом количества движения – спином. Не за счет того, что он движется вокруг какого либо центра, как в атоме водорода, например, а всегда, в каком бы состоянии он ни находился. В таблице 2 приведены все перечисленные в тексте численные характеристики частиц, которые заполняют нижний уровень таблицы 1. Конечно, в таблицу 2 мы не поместили постоянную Планка и скорость света. Они, будучи характеристиками современного научного знания, принадлежат не отдельным частицам, а всей физике. Постоянную Планка и скорость света именуют *фундаментальными константами* (см. таблицу 3). До последней четверти прошлого века никто не сомневался, что все электрические заряды в природе равны целому числу элементарного заряда, а электрон и протон являются носителями элементарного заряда – каждый со своим знаком. В свободном пространстве не были обнаружены частицы с зарядом, меньшим электронного, или с нецелочисленным электронным зарядом, а поисков было предостаточно. Однако на упоминавшемся кварковом уровне дело обстоит не так, но об этом позднее. А пока будем по-прежнему считать численное значение заряда электрона и протона фундаментальной характеристикой и оставим его в таблице 2.

*Таблица 2*

| | электрон | протон | нейтрон |
|---|---|---|---|
| заряд | $-1{,}60\cdot10^{-19}$Кл | $+1{,}60\cdot10^{-19}$Кл | 0 |
| масса | $9{,}11\cdot10^{-31}$кг | $1{,}673\cdot10^{-27}$кг | $1{,}674\cdot10^{-27}$кг |
| спин | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ |
| магнитный момент | $1{,}01\ \mu_e$ | $2{,}79\ \mu_p$ | $-1{,}91\ \mu_p$ |

*Таблица 3*

| | |
|---|---|
| скорость света $c$ | 299792458 м/с |
| постоянная Планка $\hbar$ | $1{,}055\cdot10^{-34}$ Дж · с |
| гравитационная постоянная $G$ | $6{,}673\cdot10^{-11}$ м$^3$ · кг$^{-1}$ · с$^{-2}$ |

Сделаем несколько замечаний к таблицам 2 и 3. В них приведены приближенные значения всех величин. Все они известны с гораздо большей точностью. Обратите внимание: нейтрон чуть тяжелее протона, что обеспечивает возможность распада нейтрона на протон, электрон и антинейтрино. Спин – квантовый вектор, он может ориентироваться в пространстве только двумя способами: либо вдоль оси, либо против. В свободном пространстве направление оси произвольно. Спин, равный $1/2$, означает, что величины проекции собственного момента количества движения частицы равны $\pm(1/2)\hbar$. Величины $\mu_e$, $\mu_p$ – это значения магнитных моментов электрона и протона согласно теории Дирака без поправок, $\mu_e=(e\hbar)/(2m_ec)$, где $m_e$ – масса электрона, $\mu_p=(e\hbar)/(2m_pc)$, где $m_p$ – масса протона. То, что у нейтрона магнитный момент не равен нулю, хотя он нейтрален, свидетельство того, что нейтрон «состоит» из заряженных частиц.

Глядя на таблицу 2, закрадывается мысль: много непонятного. Например, почему нет среди характеристик частиц их радиуса? Оказывается, надо считать, что электрон – точка. Именно так! Хотя, по-видимому, это вносит в теорию много осложнений. Попытки ввести конечный радиус, которые делались разными способами, не увенчались успехом. Значит, точка. Но ведь она крутится! У нее есть собственный момент количества движения – спин. Как же так? А что точка имеет массу и заряд, меньше удивляет? Посчитать нуклоны точками не удается: протон и нейтрон занимают некое пространство – сферу радиусом порядка $10^{-15}$ м. Значит, протон в 100000 раз меньше атома. Запомним этот факт и обратим внимание, что в таблице 2 есть еще одна строка, согласно которой все три частицы – электрон, протон, нейтрон – магнитики, правда очень маленькие, сверхмикроскопические. Значения их магнитных моментов приведены. И так как мы упомянули уравнение Дирака, то имеем право сказать: теория (квантовая электродинамика) позволила вычислить величину магнитного момента электрона с огромной точностью (с 13 знаками после запятой), и она совпала с экспериментом. Обратите внимание, какой точности достигает эксперимент! Значит, кое-что объяснено.

Однако на данном этапе нашего изложения не это самое важное. При построении теории атомов и молекул не слишком важно, каким путем выяснены численные характеристики элементарных частиц: получены они в результате экспериментов или как следствие более глубокой теории. Для того чтобы подниматься вверх по ступеням лестницы таблицы 1, достаточно знать об элементарных частицах то, что записано в таблице 2, добавив сведения о действующих между частицами силах. Силы, действующие между заряженными частицами, известны. Их описывает закон Кулона, хорошо знакомый по школьной физике. А какие силы действуют между нуклонами? Не зная их, нельзя даже пытаться строить теорию ядер атомов. Ясно, что не электрические силы удерживают протоны и нейтроны в ядре. Ведь достоверно известно, что в ядрах нет отрицательно заряженных частиц. Но есть специфические силы взаимодействия между нуклонами. Их природа понята, они подробно описаны. Их называют *ядерными силами*, а взаимодействие с их помощью – *сильным взаимодействием*. Мы вернемся еще к сильному взаимодействию. Пока только подчеркнем: введи мы в таблицу 2 информацию о ядерных силах – все, что надо для построения грандиозного здания физики, у нас есть.

Но в каждом научном поколении из века в век, к счастью, существуют ученые, ощущающие потребность углубиться, выяснить происхождение свойств всего, с чем приходится иметь дело в процессе создания научной картины Мира. Они готовы пренебречь понятием «элементарные», чтобы попытаться найти ответ на вопрос: почему у частиц, названных элементарными, именно такие свойства, а не какие-то другие?

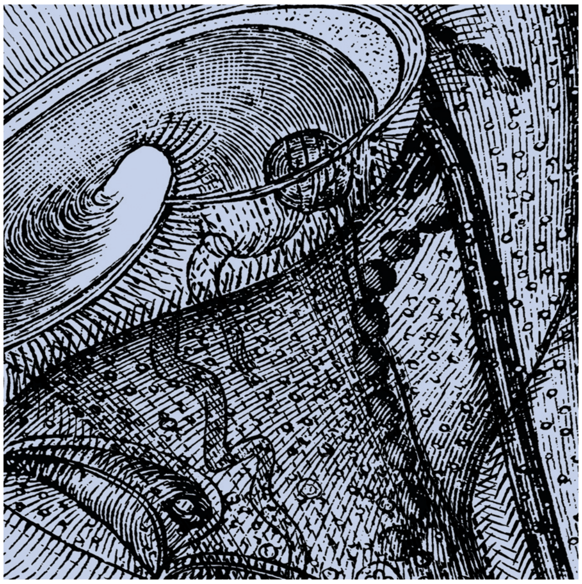
Хотя по совсем другому поводу, но прекрасно выразил эту эмоцию Борис Пастернак:

Во всем мне хочется дойти
До самой сути....
До оснований, до корней,
До сердцевины.

И поэт понимает, что выполнить желаемое необычайно трудно. Есть один путь:

Свершать открытья.

Пример «свершения открытий» будет приведен. А пока отметим: описание частиц, которое должно служить исходным для понимания структуры и свойств атомов и молекул, может и *должно* содержать не только числа, но и более сложные математические понятия. Как было уже показано, например – *векторы*. Не зная значений спина электрона и его магнитного момента (спин и магнитный момент – векторы), невозможно было бы построить теорию атомов и молекул, понять природу магнетизма атомно-молекулярных частиц.



Думаю, таблица 1, изображающая иерархию объектов, изучаемых физикой, не будет изменена. Возможно, к ней добавятся новые уровни. Об одном – кварковом – уже упоминалось, и мы к нему вернемся. Необходимо будет добавить уровень или даже уровни для темной материи и темной энергии непосредственно под самым верхним уровнем «Вселенная». Но уровни, которые уже есть в таблице 1, не могут быть ни отменены, ни заменены какими-либо другими: ведь атомно-молекулярное строение материи, существование планет, звезд, галактик и их скоплений – объективная реальность.

Наука – одна из наиболее динамичных сфер человеческой деятельности. Физика в этом процессе долгое время лидировала. Сейчас, пожалуй, наиболее быстро развивается молекулярная биология. Но ведь по большому счету молекулярная биология – часть физики. Мы даже укажем ее место в таблице 1.

В сферу научного исследования попадают объекты, ранее недоступные. Иногда они находятся в глубинах материи, иногда бесконечно удалены от Земли. А иногда они создаются: обычные вещества помещают в искусственно созданные условия или создают объекты, не существующие в природе, например печатные схемы, транзисторы, графен – моноатомную пленку углерода. Экспериментальная техника, теории и вычислительные возможности – все методы исследования совершенствуются с такой быстротой, что ощущение отставания нередко возникает в процессе работы над только что актуальной темой. Часть идей бесследно исчезают, оставаясь, возможно, интересными и важными только дотошным историкам науки. Лишь некоторые идеи навсегда остаются в поле зрения активно действующих ученых. У них завидная судьба: в дальнейшем они приобретают ореол классических.

Но вот что удивительно: основные представления квантовой механики и теории относительности не потребовали изменений. Самые неожиданные открытия удается объяснить, не прибегая к пересмотру основ. Как тут ни удивляться?! Созданные на малютке Земле, они справедливы в просторах Космоса. Для их формулировки, кроме сосредоточенной мысли, потребовались опыты, которые производились приборами, размещавшимися на лабораторном столе, а результаты, которые получены на гигантских ускорителях или с помощью телескопов, вынесенных за пределы Земли, не требуют их пересмотра.

Приведенная схема – структура современной физики – обладает важнейшим свойством, свидетельствующим о достигнутом уровне развития науки о природе. Назовем его условно *научным консерватизмом*. Физика беспрерывно развивается и изменяется. Научный консерватизм проявляется в поразительной устойчивости приведенной схемы. Либо новые открытия сдвигают береговую черту материка познаного, либо заполняют белые пятна, существовавшие на материке. Бывает, что к открытию приводит обнаружение белого пятна – возможности существования чего-то ранее неизвестного. На протяжении более полувека приведенная схема при этом не подвергалась сомнению. Не только в том смысле, что не подвергалась сомнению атомно-молекулярная структура материальных тел, но и не возникала необходимость пересмотра основ. Пока. Даже тогда, когда открытие произошло вне материка познанного.

* * *

Важным достижением науки является понимание, на какой уровень следует поместить практически любой объект макромира и из чего, скорее всего, надо исходить в попытках объяснить обнаруженное явление или свойство. Каждый объект неживой природы, каждое явление находит свое место на определенном уровне. Любая естественно-научная дисциплина (не только раздел физики) имеет свое место на схеме. Место химии – на уровне «атомы, ионы, молекулы», геологии и метеорологии – на уровне «макроскопические тела», геофизики и астрофизики – здесь же. Даже биофизика (физика живого и молекулярная биология) легко находит свое место на схеме – на уровне «атомы, ионы, молекулы».

Как нарисованная схема связана с представлением о материке познанного и об океане непознанного? Согласно более или менее общей точки зрения, все, что на всех уровнях, кроме нижнего и верхнего, находится на материке познанного. Это означает, что схема фиксирует: нам известно, из чего состоят объекты (структуры) на всех уровнях, кроме верхнего и нижнего, и, по крайней мере в общих чертах, известны основные законы, которым подчиняется поведение этих объектов. Как мы уже говорили, на карте материка познанного есть белые пятна и достаточно много плохо изученных областей. Почти в каждой из этих областей – свои важные, интересные, специфические задачи.

Граница материка познанного не зафиксирована. Развитие науки расширяет его границы. Например, ядерная физика лишь сравнительно недавно перенесена из океана непознанного на материк познанного. Структура атомных ядер в основном была ясна сравнительно давно. После открытия нейтрона (Джеймс Чедвик, 1932 г., Нобелевская премия 1935 г.) несколько физиков высказали предположение, что ядра атомов состоят из протонов и нейтронов. Предположение подтвердилось. Однако природа сил, действующих между нуклонами, была понята значительно позже. Думаю, тех, кто посвятит себя исследованию нейтронных звезд и других космических объектов, состоящих из нуклонов, ожидает много неожиданностей. Но, разгадывая загадки, исследователь может опираться на то, что известно о нуклонах. Поэтому-то эти структуры и находятся на материке познанного. Остановился на ядерной физике, потому что она одна из последних нашла свое место на материке познанного. Сравнительно недавно она была на нижнем уровне, наряду с нуклонами и электронами. Надо сказать, что, как мы увидим, нуклоны уже тоже можно считать принадлежащими материку познанного. Научно-популярная литература неизбежно отстает от жизни науки. Она всегда в прошлом. Кто-то даже высказал совсем еретическую мысль: энциклопедии содержат то, чем *уже* не занимаются ученые. Но само существование энциклопедий свидетельствует о том, что для движения науки вперед знание того, что наука освоила в прошлом, абсолютно необходимо.

Можно сказать совсем просто: новое открытие либо не отменяет старые, либо указывает, в чем допущена ошибка при открытии или описании установленного. Или, согласно сказанному выше: попавшее на материк познанного не покинет его, пока ученые не убедятся, что на материк попало нечто в результате ошибки. Такое случается относительно редко. Думаю, большинство ученых верят, что *наука накапливает истинные знания о природе*. Поэтому наука консервативна. Нет необходимости с каждым новым открытием пересматривать все полученные ранее результаты. Или, иными словами,открытие нового свойства, явления на одном из уровней (на любом, даже на самом нижнем или самом верхнем) не требует *уже* для своего объяснения смены или пересмотра *основных законов природы*, а также результатов, полученных на уровнях, расположенных ниже.

В формулировке важно наречие *уже*, т.е. *теперь, в настоящее время*. По масштабам истории (но не истории физики!) недавно, в прошлом веке, произошла научная революция. Рождение квантовой механики и теории относительности – грандиозные завоевания бескровной научной революции.

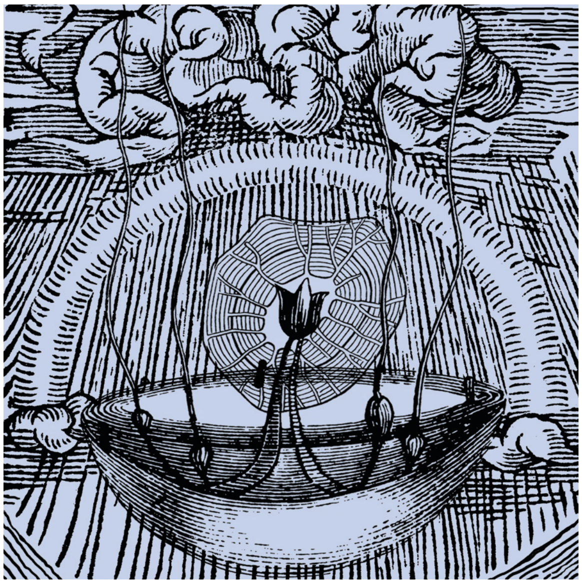
* * *

Приведем три примера для лучшего понимания термина «научный консерватизм».

Первый пример. Более сорока лет сверхпроводимость была дразнящей загадкой. Казалось, объяснить, почему электроны с понижением температуры начинают двигаться по металлу без сопротивления, удастся, только отказавшись от основ теоретических представлений о металлах. Предполагали даже, что нечто, чего мы пока не знаем, есть в самих электронах, что проявляется только тогда, когда металл переходит в сверхпроводящее состояние. Ныне сверхпроводимость принципиально объяснена. Это не потребовало отмены теории металлов и, тем более, открытия каких-то ранее неизвестных свойств электронов. Джон Бардин, Леон Купер и Джон Шриффер поняли, что *обычные* электроны, благодаря обычному электрон-фононному взаимодействию – тому самому, которое является причиной температурной зависимости сопротивления в нормальном состоянии металла, – при низких температурах могут образовать пáры. А пáры, как они показали, движутся, по металлу без сопротивления. Загадочное явление сверхпроводимости получило объяснение. Авторы в 1972 году заслуженно получили Нобелевскую премию, а Бардин (редчайший случай) – даже вторую (первую премию вместе с Уильямом Шокли и Уолтером Браттейном Бардин получил в 1956 году за исследования полупроводников и открытие транзисторного эффекта). Консерватизм проявился в том, что объяснение загадочного явления не потребовало революционных преобразований в понимании структуры металлов. Надеюсь, это мое утверждение не умаляет заслуг авторов теории. Они проявили не только высокий прфессионализм, но и редкую нестандартность мышления. Все знали о существовании слабого электрон-фононного взаимодействия, но не смогли преодолеть привычного представления о том, что слабое притяжение не может быть причиной образования связанного состояния (пáры). Оказалось, может.

Второй пример, наверное, более убедителен. В прошлом многим ученым – их называли *виталистами*, или сторонниками *витализма* – казалось, что для объяснения феномена жизни на микроскопическом уровне необходимо обнаружить какие-то особые свойства атомов и молекул. Активность живых организмов для виталиста – результат действия специфической «жизненной силы». Такая точка зрения высказывалась до замечательных успехов молекулярной биологии. Однако для понимания механизма наследственности, скажем, не понадобилось пересматривать известные физические свойства атомов и молекул или дополнять их новыми. Все полученные впечатляющие результаты молекулярной биологии не потребовали обнаружения у молекул и атомов, из которых состоят белки, ДНК, РНК, т.е. у макромолекул, осуществляющих специфические свойства живых организмов, каких-то особых свойств, которые отсутствуют у других атомов и молекул. Конечно, это не означает, что можно произвольно менять в белках, ДНК, РНК одни атомы на другие, не влияя на протекание жизненных процессов. Живой организм предельно чувствителен к составу входящих в него молекулярных структур. Но объяснение любого свойства, характерного для живого организма, насколько я знаю, всегда осуществляется пониманием того, как перемещаются из одной структуры в другую атомы или куски молекул. Происходит это строго по тем же законам физики, что и реакции в неживой природе. И никогда не была обнаружена особая «жизненная сила».

А вот и третий пример, относящийся к самому нижнему уровню. Долгое время существовала загадка β-распада – излучения радиоактивным ядром электрона. Бета-распад – результат распада нейтрона на протон и электрон. В чем была загадка? В том, что при каждом акте распада с несомненностью нарушался закон сохранения энергии. Вопиющее нарушение одного из наиболее фундаментальных законов природы, к тому же в элементарном процессе, ставило в тупик. Нильс Бор даже высказал крамольную идею, что закон сохранения энергии имеет статистическую природу, выполняется только в среднем, а в каждом отдельном акте может нарушаться. Положение изменилось, когда Вольфганг Паули (в 1930 году неофициально, а в 1933 официально на Сольвеевском конгрессе) высказал утверждение, что вместе с электроном из ядра вылетает нейтральная частица, получившая в дальнейшем название *нейтрино*, уносящая часть энергии – ту, которой не хватало для выполнения закона сохранения. Нейтрино очень сложно обнаружить непосредственно, но в конце концов это удалось. Еще до его обнаружения научный мир согласился с тем, что β-распад сопровождается вылетом трудно уловимого нейтрино. Картина β-распада усложнилась или упростилась? Конечно, упростилась. Признание нарушения законов сохранения энергии и/или импульса в каждом физическом процессе означало бы катастрофу – непоследовательность всей стройной естественно-научной картины природы. Подчеркнем, что открытие нейтрино подтвердило консервативность физических законов: установленный на совершенно других, макроскопических, явлениях закон сохранения, как выяснилось, не нарушается и тогда, когда в явлении участвуют элементарные частицы.



* * *

Знание строительного материала для всего, что составляет окружающий нас Мир и нас самих, единство законов природы во всем познанном Мире, понимание, что область принципиально понятого непредставимо огромна, – внушали и внушают чувство, похожее на восторг и на благоговение. Вот как я описал свои ощущения в статье «Из чего все состоит», опубликованной несколько лет назад в журнале «Наука и жизнь»:

«Ночью, когда в небе нет облаков, не видна Луна и не мешают фонари, небо заполнено ярко сияющими звездами. Не обязательно искать знакомые созвездия или стараться найти близкие к Земле планеты. Просто смотрите! Постарайтесь представить себе огромное пространство, заполненное мирами и простирающееся на миллиарды миллиардов световых лет. Только из-за расстояния миры кажутся точками, а многие из них так далеки, что не различимы в отдельности и сливаются в туманности. Кажется, мы – в центре мироздания. Теперь мы знаем, что это не так. Отказ от геоцентризма – заслуга науки. Потребовалось много усилий, чтобы было осознано: малютка Земля движется в случайном, казалось бы ничем не выделенном, участке необозримого (буквально!) пространства.

Но на Земле зародилась жизнь. Она развилась столь успешно, что сумела произвести человека, способного постигать окружающий его мир, искать и находить законы, управляющие природой. Достижения человечества в познании законов природы столь впечатляющи, что невольно испытываешь гордость от принадлежности к этой щепотке разума, затерянного на периферии заурядной Галактики.

Учитывая разнообразие всего, что нас окружает, поражает воображение существование общих законов. Не менее поразительно то, что все построено из частиц всего трех типов – из электронов, протонов и нейтронов».

К восторгу и благоговению (оправданным, по-моему) добавим несколько чисел. Они смогут помочь представить себе материк познанного и даже оценить океан непознанного.

Современные телескопы помогают ученым улавливать электромагнитные волны, дошедшие до Земли от источников, расположенных на расстояниях более десяти миллиардов световых лет. Расшифровывая их, умеют получать достоверную информацию, позволяющую сделать вывод, что представляет из себя источник. За год свет проходит приблизительно 9460730472580820 метров. Если чуть округлить, 1 световой год составляет $10^{16}$ метров. Значит, современная физика обладает информацией, получаемой из сферы, радиус которой около $10^{27}$ метров. Сколь ни огромен радиус сферы, все же ограничение есть: из более далеких областей Вселенной получить непосредственную информацию пока не удается.

Ограничение есть и в получении информации из глубин материи. Если исходить из таблицы 1, то физике доступна информация об источниках, размер которых приблизительно равен или больше $10^{-15}$ метра. Таков приблизительно радиус нуклона. Нуклоны признаны элементарными частицами. Теперь представим себе *шаровой слой*, внешний радиус которого порядка $10^{27}$ метров, окружающий сферический слой, малый радиус которого в $10^{42}$ раз меньше радиуса внешней границы слоя. Если вспомнить сказанное обо всем, что расположено на схеме между верхним и нижнем уровнями, то придем к выводу, что шаровой слой – это схематическое изображение материка познанного.

Мы подчеркивали, что на материке познанного есть множество белых пятен, т.е. множество фактов, явлений, свойств до сих пор не получили объяснения. В чем же разница между белым пятном и «пространством» вне материка познанного?

Главное отличие в том, что, имея дело с объектом или явлением, заведомо принадлежащим материку познанного, мы уверены: *все* происходящее в неживой природе со *всеми* состоящими из электронов и нуклонов объектами *может быть уже понято на основе известных законов*. Точнее надо сказать так: *до настоящего времени* на материке познанного не обнаружено ничего, что противоречит *уже* установленным законам. А ведь ныне обнаруженных и понятых фактов неописуемо много. Многие факты – явления, свойства – раньше были предсказаны, а потом обнаружены, что особенно важно для уверенности в истинности понимания открытых законов. Конечно, почти каждый новый результат потребовал усилий и удачи. Есть настолько удивительные явления, что для понимания их природы и построения их теории понадобились глубокие идеи и нетривиальные расчеты, но *все они основывались на известных законах и являются их следствием*. Так было, напомню, не всегда, но со второй половины XX века это так.

Многие, а возможно почти все, активно и плодотворно работающие ученые-естественники, исходя из подобных рассуждений, а некоторые, не задумываясь и следуя традиции, абсолютно уверены, что имеют вполне надежную основу как для получаемых результатов исследований, так и для выводов из них. Эта уверенность не противоречит тому, что все, находящееся на материке познанного, не исчерпывает информацию, которой владеют физики. Будем считать, что для физиков это сигналы из океана непознанного. О чем идет речь? Здесь укажу только на обнаруженные частицы – мюоны и особые мюонные нейтрино. Мюоны похожи на электроны, но тяжелее их приблизительно в 200 раз. Какова их роль в Мире, пока не вполне ясно. Будут и другие примеры. Но вот что важно: физики, исследования которых относятся к области вне материка познанного, не сомневаясь, пытаются делать выводы, основываясь на тех же законах, которые успешно действуют на материке познанного. Ими руководит такая мысль: сколько раз казалось, что обнаружено нечто необъяснимое, но объяснение удавалось получить, не пересматривая квантовой механики и релятивистской теории. Каждый раз оказывалось, что фундамент надежен и для сомнений нет оснований. Возможно, правда, пока.

Восхищение непредставимыми размерами материка познанного несколько тускнеет, а бывает и исчезает, когда задумываешься, сколь неоднородно исследован материк познанного. Еще более грустные и тревожные мысли приходят в голову, когда вспоминаешь, как поразному использует человечество приобретенные им знания. Речь пойдет о двух недостаточно хорошо освоенных областях на материке познанного. Обе они находятся на том уровне, который предоставлен макроскопическим телам, конкретно – о *метеорологии* и *геофизике*. Обе они изучают Землю – место нашего обитания. О заселении других планет идут только разговоры. Судьба человечества пока неразрывно связана с Землей.

Великие географические открытия – далекое прошлое. Шли годы. Корабли избороздили все океаны и моря, открыты и исследованы не только все материки, но и любые клочки суши, которые трудно разглядеть на самых подробных картах, люди побывали на обоих полюсах Земли, заселили научными станциями покрытый вечным ледяным покровом самый неприветливый материк Антарктиду, покорили вершину мира Эверест, сделав его доступным альпинистам. Наверное, еще есть места, куда нога человека не ступала, но причина этого не в невозможности туда попасть, а в отсутствии желания, в понимании, что экспедиция туда ценного знания скорее всего не принесет.

Не только в эпоху великих географических открытий, а и в близкие к нам времена усилия, которые тратили люди, достойны памяти. История сохранила навеки имена многих. Хочется вспомнить, например, английских исследователей Африки Давида Ливингстона (1813–1873) и Генри Мортона Стэнли (1841–1904). Ливингстон был первым европейцем, увидевшим водопад Викторию, а Стэнли разобрался с тем, где начинаются великие реки Нил и Конго. Почему я вспомнил именно о них? Потому что они полностью посвятили свои жизни ликвидации белых пятен на мало изученном материке. Описанием их путешествий я зачитывался в юности. И не только: будучи взрослым, с интересом читал их собственные сочинения. Советую.

Понимаю, вы прекрасно знаете, что Земля подробно исследована. Но будем точны: речь идет не о Земле, а о поверхности Земли, о *географии*, а не о *геофизике и метеорологии*. Геофизика изучает процессы, которые происходят в толще Земли, а метеорология – в ее атмосфере. Об атмосфере известно много, а о внутренности Земли – меньше, и знания более схематичны. Причина ясна: внутрь трудно заглянуть. Мне показалось, что, скажем, у атомной или ядерной физики накоплен заметно больший запас знаний о подведомственных им «территориях», чем у геофизики и даже метеорологии. Возможно, мое впечатление ошибочно.

Освоенность материка познанного определяется не только накопленным на нем знании, но и тем, как это знание используется. Развитие техники невозможно без научных достижений, а эволюция образа жизни в большой степени определяется техническими возможностями. Особенно ощущается это в последние годы, когда заметные изменения происходят за время, которое зачастую много меньше времени жизни одного поколения, и нетрудно проследить, как и какое научное открытие привело к тому или иному техническому результату, заметно изменив нашу жизнь.

Есть разные точки зрения относительно того, полезно или вредно ускорение прогресса. Не берусь высказывать свое мнение, оно у меня не выработалось. Но есть две сферы человеческой деятельности, неразрывно связанные с наукой, о которых я смогу высказать свое вполне определившееся мнение, сравнивая их.

Думаю, все хорошо знают, каких усилий и, прежде всего, концентрации научного интеллекта потребовалось для создания невиданного ранее атомного, или, более точно, ядерного оружия. Ученых, которые создали атомную и водородную бомбы для Соединенных Штатов и их союзников, я знаю по их научным трудам. С некоторыми из основных участников Советского атомного проекта был знаком лично. Исаак Константинович Кикоин, Юлий Борисович Харитон, Яков Борисович Зельдович, Андрей Дмитриевич Сахаров… – все они были не просто очень крупными учеными, они были первыми в тех областях, в которых работали, и они были высокими интеллектуалами. Как и их коллеги за океаном, все свои способности, все свои силы, весь свой интеллект и весьма заметную часть своей жизни они посвятили созданию эффективного способа уничтожения. И государства не жалели затрат, чтобы замыслы ученых были осуществлены. Знаю, что всегда все или почти все, кто работал над созданием супербомб, были уверены, что заняты делом первой необходимости. Не со всеми аргументами согласен, но спорить я не хочу и не имею морального права – хотя бы потому, что сейчас они не могут мне возразить, а тогда, в первые годы после второй мировой войны, аргументы против создания атомной бомбы не приходили мне в голову. Свою роль я вижу в другом: хочу подчеркнуть, что для решения задачи создания атомного оружия человечество необычайно эффективно, не жалея усилий и трат воспользовалось накопленным на материке познанного знанием, а там, где его не хватало, срочно его добывало.

В последние годы я неоднократно наблюдал ужасные последствия цунами, землетрясений, ураганов, торнадо. Неужели знаний всего научного сообщества не хватает, чтобы ну пусть не ликвидировать стихийные бедствия, а хотя бы вовремя и надежно предупреждать о них, дабы была возможность принять адекватные меры? Особенно горько мне было, когда я видел гоняющихся за торнадо молодых людей с кинокамерами на автомашинах или мотоциклах, как мне кажется, рискующими своей жизнью не столько в попытках получить необходимое знание о разрушительных явлениях, сколько в поисках сильных ощущений. Вспоминал я о бездне работ по гидро- и газодинамике, по кинетике газов и по неравновесной термодинамике, о теориях зарождения вихрей, т.е. торнадо и ураганов. Теоретики дискутируют между собой… Собрать бы ученых, мечтал я, интеллект которых соизмерим с тем, какой понадобился для создания атомного оружия. Не только был бы найден способ более раннего предупреждения, но и удалось бы разработать эффективные меры ослабления кошмарных в настоящее время последствий штормов, торнадо. Более того, мне кажется, наука об атмосфере находится уже на таком уровне, что пора задуматься, как воспользоваться накопленным знанием для решения более амбициозных задач, чем увеличение интервала предупреждения штормов и торнадо и даже установка ветряных генераторов электроэнергии. В то же время ощущаю беспокойство, даже, честно говоря, страх, когда по выделению энергии разряд молнии сравнивают со взрывом атомной бомбы. Неужели знания будут использованы не на спасение людей от атмосферных катаклизмов, а на их уничтожение; неужели будут созданы (возможно, уже созданы?!) устройства, которые призваны вызывать атмосферные катастрофы на территории противника?

С геофизикой, похоже, сложнее. В общих чертах строение Земли известно. Но достаточно ли накоплено знаний, чтобы осуждать ученых, которые не создали надежных, своевременных методов оповещения об опасности? Мне кажется, нет, недостаточно. Если так, то почему бы не сосредоточить усилия геофизиков мира с целью – понять, как и где происходит накопление энергии сдвигов тектонических плит? Именно она освобождается с такими катастрофическими последствиями при землетрясении. Процессы в недрах Земли происходят медленно. Только в момент непосредственной близости к неустойчивости процессы идут так стремительно, что подготавливаться к последствиям поздно. Приближение к неустойчивости, думаю, как-то себя обнаруживает. Неужели оно не может быть зафиксировано и использовано для своевременного предупреждения? Сказанное почти дословно можно переадресовать и вулканологии.

**Рекомендуемые книги**

1. *Стивен Вайнберг.* Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. – М.: ЭКСМО, 2011.

2. *Стивен Вайнберг.* Мечты об окончательной теории. Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

3. *Шелдон Ли Глэшоу.* Очарование физики. – М.: R&C Dynamics, 2002.

4. *Брайан Грин.* Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. – М.: Либроком, 2011.

5. *Брайан Грин.* Ткань космоса. Пространство, время и текстура реальности. – М.: Либроком, 2011.

6. *Брайан Грин.* Скрытая реальность: Параллельные миры и глубинные законы космоса. – М.: Либроком, 2013.

7. *Алекс Виленкин.* Мир многих миров. Физика в поисках параллельных вселенных. – М.: Астрель, 2010.

*(Продолжение следует)*

# Математические модели интернета

А.РАЙГОРОДСКИЙ

### Что такое интернет?

Еще в середине 90-х годов XX века, каких-то 15–20 лет назад, про интернет практически никто не знал. А если и знал про его существование, то вряд ли имел к нему доступ. И потому вопрос, поставленный в заголовке этого раздела, тогдашнему читателю показался бы вполне уместным. Однако сейчас, когда интернет прочно вошел в нашу жизнь, этот вопрос должен вызвать недоумение: «Ну, как «что такое»? Ясное дело. Это источник информации, удобная площадка для общения. Там есть сайты, на них страницы, есть блоги, социальные сети, спам и пр.». Все это верно. И тем не менее, так ли уж много мы знаем об устройстве «всемирной паутины»? Прежде всего, понимаем ли мы, какие законы правят ее формированием? А может, и вовсе нет никаких законов? Ведь, казалось бы, интернет – это совершенно случайная, никем не контролируемая среда, и, стало быть, ничто не мешает ее *непредсказуемому* развитию. Что ж, давайте обсудим.

Будем представлять интернет в виде графа. Вершинами этого графа будут сайты, и между двумя вершинами $A$, $B$ мы проведем столько ребер, направленных от $A$ к $B$, сколько есть ссылок с сайта $A$ на сайт $B$, и столько ребер, направленных от $B$ к $A$, сколько есть ссылок с сайта $B$ на сайт $A$. Нас будет интересовать устройство этого графа, который по понятным причинам принято называть *веб-графом*. Оказывается, вопреки сделанному выше предположению о полной непредсказуемости в поведении всемирной паутины, веб-граф обладает рядом устойчивых свойств – свойств, которые остаются неизменными на протяжении всей истории исследований интернета. Не претендуя на полноту, опишем несколько таких свойств. Их уже будет достаточно для понимания того, как сильно подчас реальная картина мира противоречит нашей интуиции.

Первое свойство веб-графа многим хорошо известно, хотя обычно речь идет о другом. Говорят о законе «шести рукопожатий». А именно, у каждого человека

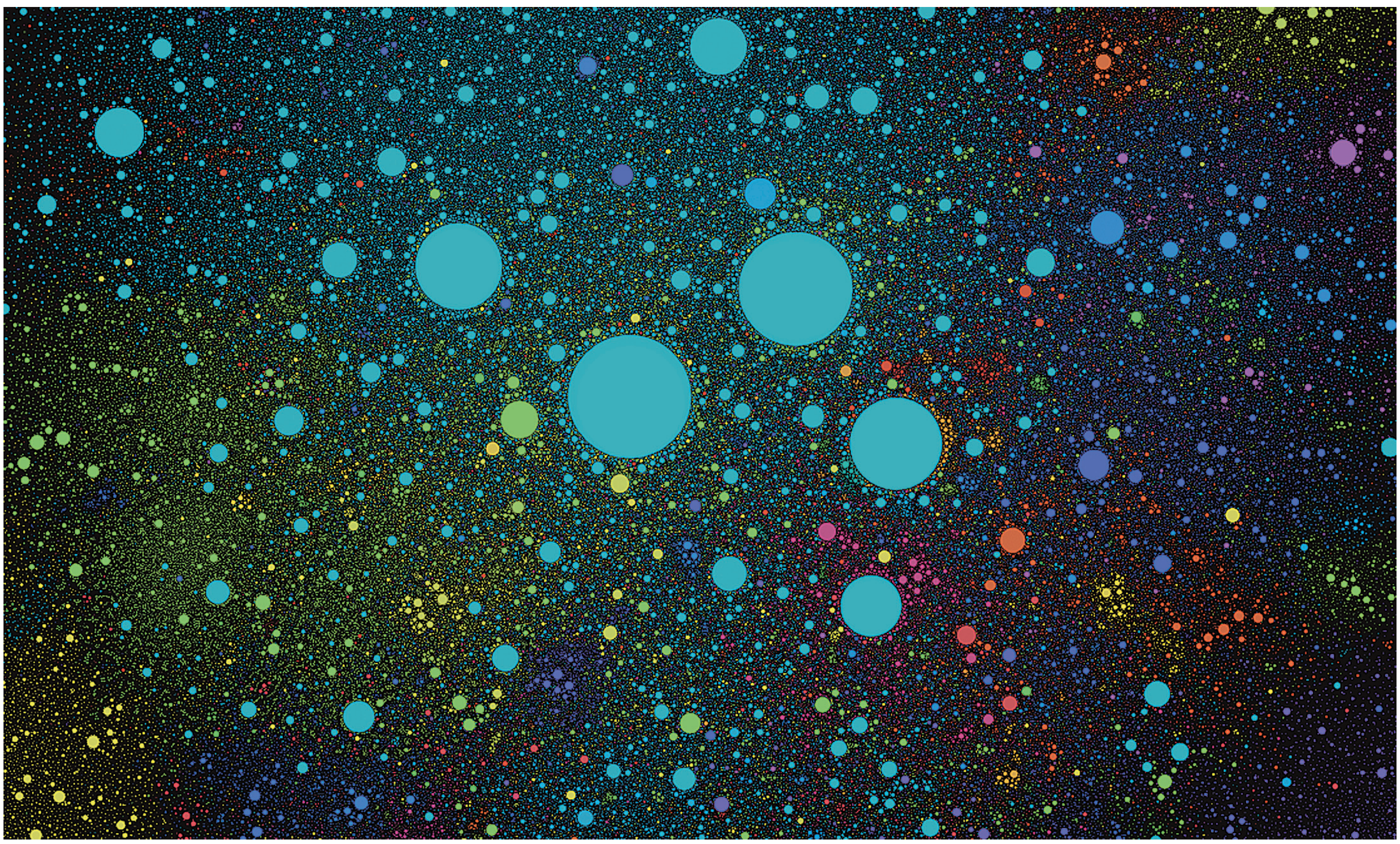


*Схема интернета с сайта internet-map.net* есть знакомые, у этих людей также есть свои знакомые и т.д. Наблюдение состоит в том, что от любого человека до любого другого человека на Земле можно «пройти» по такой цепочке взаимных знакомств и что количество «звеньев» в ней не превзойдет шести. Иными словами, я пожму руку своему другу, он пожмет руку одному из своих приятелей, и через не более чем шесть таких рукопожатий (при правильном выборе их последовательности) очередным знакомым окажется президент страны или какой-нибудь разносчик пиццы из Огайо, – вообще, любой наперед заданный человек. Ровно та же история с интернетом. Только здесь рукопожатия заменяются «кликами» (компьютерной мышью по ссылкам) и утверждается, что для перехода с любого сайта на любой другой сайт потребуется не более шести кликов (при правильном выборе их цепочки).

В терминах теории графов речь идет о *диаметре* графа. Дадим его определение. *Расстоянием* между вершинами графа называется количество ребер в кратчайшей реберной цепочке, соединяющей эти вершины. Если граф ориентированный (как, например, веб-граф), то все ребра в рассматриваемых цепочках должны следовать друг за другом в одном и том же направлении. Диаметр – это самое большое расстояние между вершинами в графе. Разумеется, бывают несвязные графы. У каждого из них диаметр считается равным бесконечности. Закон шести кликов – это факт, состоящий в том, что диаметр веб-графа равен шести. Для обозначения диаметра графа $G$ используют запись $\operatorname{diam} G$.

Описанное свойство отлично характеризуется выражением «мир тесен». Казалось бы, это должно означать, что в веб-графе довольно много ребер. Как бы не так! И тут интуиция нас подводит. Второе свойство веб-графа состоит в его исключительной «разреженности». Грубо говоря, если вершин у веб-графа $n$, то ребер у него не более $mn$ с некоторым постоянным $m \ge 1$. Давайте поймем, почему это мало. В самом деле, даже если пренебречь тем, что в веб-графе бывают кратные ребра и кратные петли (с одних страниц данного сайта вполне могут идти ссылки на другие его же страницы), ему ничто не мешает иметь $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Но последняя величина растет квадратично по $n$, тогда как реальное количество ребер значительно меньше: их, как максимум, $mn$. В некотором смысле особенно меньше и быть-то не может: если у графа на $n$ вершинах меньше чем $n - 1$ ребер, то этот граф заведомо не связен.

И еще одно, третье, свойство. Давайте смотреть на *степени* вершин веб-графа. Тут, конечно, есть тонкость, связанная с тем, что у ориентированного графа бывают как *входящие степени* $\operatorname{indeg} v$ (число ребер, правым концом которых служит данная вершина $v$), так и *исходящие степени* $\operatorname{outdeg} v$. Если не оговорено противное, мы будем понимать под степенью вершины сумму ее входящей и исходящей степеней, т.е. число всех ребер, концом которых она является: $\deg v = \operatorname{indeg} v + \operatorname{outdeg} v$. Нас интересует доля вершин веб-графа, имеющих данную степень. Иными словами, пусть $n$ – количество вершин веб-графа, а $d$ – некоторое фиксированное число. Обозначим через $\#(n,d)$ величину

$$\frac{\left|\{v : \deg v = d\}\right|}{n},$$

т.е. мы делим количество вершин степени $d$ (модулем обозначена мощность множества, заключенного в фигурных скобках) на общее количество вершин и получаем искомую долю. Оказывается, что всегда

$$\#(n,d) \approx \frac{c}{d^{2,3}}.$$

Здесь $d \ne 0$, поскольку веб-граф связен, а $c$ – константа, которую легко найти, ведь мы знаем, что сумма всех величин $\left|\{v : \deg v = d\}\right|$ равна $n$, откуда $\sum_d \#(n,d) = 1$. В сущности, $\#(n,d)$ – это *вероятность* того, что вершина графа имеет степень $d$, а сумма всех вероятностей должна равняться единице. Гораздо удивительнее здесь константа 2,3, которая не меняется с течением времени! Описанное свойство называется *степенным законом распределения* степеней вершин веб-графа.

Итак, ситуация весьма любопытная. Несмотря на кажущуюся хаотичность в процессе образования интернета, есть весьма жесткие статистические ограничения, которым он годами подчиняется. Почему это так? Что стоит за всеми свойствами интернета? Каковы законы, управляющие формированием сети? Мало того, что все эти вопросы крайне важны для понимания устройства мира, – ответы на них не могут не принести и серьезную практическую пользу: имея правильную *модель* интернета, можно пытаться лучше выявлять некоторые виды спама («неестественные ссылочные структуры», называемые *линковыми кольцами*), тестировать алгоритмы обхода интернета поисковым роботом и др. В следующих разделах мы обсудим все это – и модели, и приложения.

### Идея предпочтительного присоединения

В 1999 году двое исследователей – А.Л.Барабаши и Р.Альберт – предложили крайне простую идею, которая, однако ж, оказалась весьма продуктивной. Идея заключалась в том, что когда новый сайт появляется на свет, он, скорее всего, «предпочитает» сослаться на те сайты, которые и без того уже многими цитированы. Более точно, вероятность, с которой новый сайт ставит ссылку на сайт-предшественник, пропорциональна (входящей) степени вершины веб-графа, отвечающей этому сайту. Один из наиболее удобных и математически строгих вариантов реализации идеи Барабаши–Альберта (идеи о *предпочтительном присоединении*) сформулировали в 2000 году математики Б.Боллобаш и О.Риордан.

Построение модели Боллобаша–Риордана состоит из двух этапов. Сперва строится последовательность графов $G_1^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ У этих графов будет по $n$ вершин и $n$ ребер. Затем эта последовательность с помощью несложного трюка преобразуется в последовательность

$G_m^n$, где $m$ – натуральное число, а количество ребер графа $G_m^n$, имеющего $n$ вершин, равно $mn$. Таким образом, графы $G_m^n$ автоматически оказываются обладающими вторым свойством веб-графа.

Итак, начнем с $G_1^n$. Будем строить эти графы по индукции. Пусть $G_1^1$ – это граф с одной вершиной (обозначим ее просто 1) и одной петлей (1, 1).[1] Предположим, граф $G_1^{n-1}$ с $n \geq 2$ уже построен. Обозначим его вершины 1, ..., $n$ – 1 и будем помнить, что ребер у него, как и вершин, $n-1$. Граф $G_1^n$ мы получим путем добавления к графу $G_1^{n-1}$ одной вершины (одного сайта) с «именем» $n$ и одного ребра (ссылки, которую делает новый сайт). Это ребро будет направлено либо из $n$ в $n$ (если снова шутить, то в данном случае надо говорить уже не об одиночестве, а о самолюбовании), либо из $n$ в какую-то вершину $v \in \{1, \ldots, n-1\}$. Само направление выбирается случайно: с вероятностью $\frac{1}{2n-1}$ ссылка из $n$ пойдет на само $n$ («самолюбование»); с вероятностью $\frac{\deg v}{2n-1}$ сайт $n$ процитирует сайт $v \in \{1, \ldots, n-1\}$. Здесь $\deg v$ – степень вершины $v$ в графе $G_1^{n-1}$, т.е. в чистом виде реализуется идея предпочтительного присоединения. В делении на $2n$ – 1 также нет ничего загадочного. Просто сумма вероятностей должна равняться единице, но $\sum_{v=1}^{n-1} \deg v$ – это удвоенное число ребер графа $G_1^{n-1}$, т.е. $2n$ – 2.

Подчеркнем, что построенная последовательность графов *случайная*. В принципе, она может принимать весьма разнообразные формы в зависимости от того, что произойдет на очередном этапе ее построения. Но это и хорошо: ведь с самого начала интуиция говорила нам, что интернет «случаен». Важно лишь, какие законы управляют этой случайностью, и сейчас мы допускаем, что один из этих законов – по сути, психологический – это закон предпочтительного присоединения.

Перейдем ко второму этапу. Зафиксируем натуральное $m \geq 2$. Рассмотрим найденный на первом этапе граф $G_1^{mn}$. У него $mn$ вершин и $mn$ ребер. Обозначим $v_1$ группу из первых $m$ его вершин, т.е. множество {1, ..., $m$}. Обозначим $v_2$ следующую группу его вершин {$m$ + 1, ..., 2$m$}. И так далее. Таким образом, у нас возникнут группы $v_1$, ..., $v_n$. Будем считать их вершинами нового графа $G_m^n$. Для каждого $i$ образуем в вершине $v_i$ столько петель, сколько есть ребер в графе $G_1^{mn}$ между теми его вершинами, множество которых мы обозначили $v_i$. Для любых $i$, $j$ с условием $1 \leq i < j \leq n$ проведем столько ребер из $v_j$ в $v_i$, сколько есть в графе $G_1^{mn}$ ребер, правый конец которых расположен в множестве, отвечающем $v_j$, а левый – в множестве, отвечающем $v_i$. В некотором смысле, мы схлопываем вершины из $G_1^{mn}$ в своего рода «метасайты», а все прежние ссылки сохраняем. На выходе имеем граф с $n$ вершинами и $mn$ ребрами. Пример перехода от графа $G_1^{12}$ к графу $G_2^6$ показан на рисунке 1.

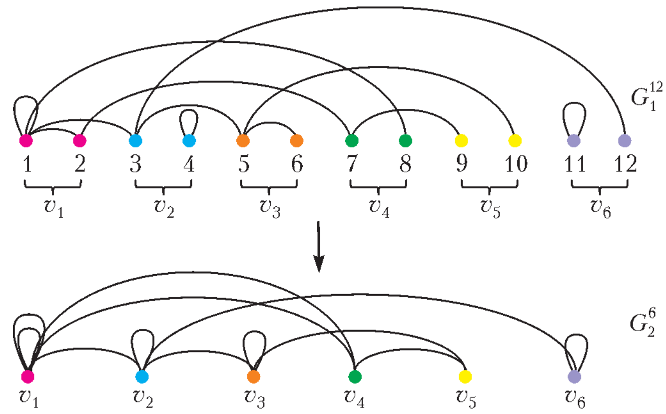


*Рис. 1*

Конструкция кажется довольно искусственной и, уж как минимум, чрезвычайно упрощенной. Тем не менее, она на удивление хорошо отражает ожидаемые свойства веб-графа. Про второе свойство говорить не нужно, так как оно заложено прямо в построение. Обсудим, стало быть, первое свойство. Авторы модели – Боллобаш и Риордан – доказали, что при $m \geq 2$ и при любом $\varepsilon > 0$ с увеличением числа вершин графа $G_m^n$ все ближе к единице становится вероятность того, что диаметр графа $G_m^n$ заключен в пределах от $(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln \ln n}$ до $(1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln \ln n}$. Иными словами, хотя граф и случаен, но «почти наверняка» его диаметр практически не отличается от дроби $\frac{\ln n}{\ln \ln n}$. Почему это хорошо? А дело в том, что у веб-графа порядка $10^7 - 10^8$ вершин. Подставляя оба числа вместо $n$ в отношение логарифмов, получаем 5,8–6,2, т.е. 6, ведь диаметр – целое число. На самом деле, даже при $n = 10^9$ отношение логарифмов не выходит за пределы семерки. Это очень медленно растущая функция, и это может объяснять, почему закон шести рукопожатий столь незыблем. Не правда ли, замечательное попадание?

Но и это не все. Есть еще третье свойство. Оно также наблюдается в модели Боллобаша–Риордана. Авторы модели доказали это при определенных ограничениях на величину $d$, фигурирующую в свойстве. Недавно Е.Гречников – выпускник механико-математического факультета МГУ и Независимого университета, работающий сейчас в отделе теоретических и прикладных исследований компании Яндекс, – доказал, что для всех $m$ и $d$ с ростом $n$ все ближе к единице становится вероятность того, что величина $\#(n,d)$, определенная на графе $G_m^n$, практически не отличается от величины $\frac{c}{d^3}$, где $c$ зависит лишь от $m$.

В последнем результате все чуть менее радужно, нежели в результате о диаметре: все-таки 3 – это не 2,3. Да, это тоже степенной закон, и это замечательно, но

[1] Однажды на лекции я пошутил: дескать, в начале всех времен был один сайт, было ему очень одиноко, и решил он поставить ссылку сам на себя... Голос из аудитории: «А что это был за сайт?» Разумеется, речь идет о модели, а не о реальности.

степень в нем немного другая. Что ж: никто и не обещал, что тривиальная модель сразу решит все проблемы.

### Уточнение модели Боллобаша–Риордана

В конце предыдущего раздела мы поняли, что модель Боллобаша–Риордана не совсем адекватно отражает даже те три свойства веб-графа, которые мы выделили с самого начала. А именно, есть небольшие проблемы со степенным законом. Эти проблемы несложно устранить, и многие исследователи в разное время приходили к одному и тому же простому решению. Мы выделим здесь П. Бакли и Д. Остгуса, которые первыми дали строгое обоснование этого подхода. Вслед за Бакли и Остгусом возьмем произвольное число $a > 0$. Будем строить графы $H_{a,m}^n$ по практически той же схеме, по какой строились графы $G_m^n$. Лишь слегка изменим вероятности в определении $G_1^n$. Если там они равнялись $\frac{1}{2n-1}$ и $\frac{\deg v}{2n-1}$, то тут мы положим их равными $\frac{a}{(a+1)n-1}$, $\frac{\deg v + a - 1}{(a+1)n-1}$. С суммой все вновь в порядке:

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{\deg v + a - 1}{(a+1)n-1} + \frac{a}{(a+1)n-1} =$$

$$= \frac{2n - 2 + (n-1)(a-1) + a}{(a+1)n-1} = 1.$$

Более того, при $a = 1$ имеем модель Боллобаша–Риордана. Число $a$ называется *начальной притягательностью вершины*. Смысл в том, что независимо от степени вершины оно дает дополнительный вклад в вероятность присоединения.

Замечательно то, что этого хватает! Утверждение про диаметр остается неизменным, а величина $\#(n,d)$, определенная на графе $H_{a,m}^n$, становится почти наверняка приближенно равной $\frac{c}{d^{2+a}}$. Таким образом, при $a = 0{,}3$ получаем полное соответствие модели той части реальности, которая отражена в выделенных нами трех свойствах интернета.

К сожалению, доказательства результатов и этого, и предыдущего разделов крайне трудны и техничны. Поэтому они выходят за рамки этой статьи. Заинтересованного читателя мы отсылаем к книгам [1], [2] и к статье [3].

А в следующем разделе мы расскажем еще об одной идее построения модели интернета.

### Модель копирования

Здесь идея такая: когда появляется новый сайт, он либо цитирует какого-то «случайного» (с точки зрения стороннего наблюдателя) предшественника, либо *копирует* ссылки с некоторого (также случайного) сайта, чья тематика близка его автору. Эта идея призвана объяснить не только степенной закон, но и факт наличия в интернете плотных сообществ, участники которых объединены общими интересами.

Строгое описание простейшего варианта модели копирования следующее. Дано натуральное число $m$ и действительное число $\alpha \in (0,1)$. Как и в случае моделей Боллобаша–Риордана и Бакли–Остгуса, строится случайная последовательность графов $G_{m,\alpha}^n$. И строится она тоже по индукции. В начальный момент времени есть одна вершина 1 и $m$ петель в ней. Пусть $n \ge 2$ и граф $G_{m,\alpha}^{n-1}$ с вершинами 1, …, $n-1$ уже построен. Добавим к нему вершину $n$ и $m$ исходящих из нее ребер. На сей раз «самолюбование» исключается, и ребра идут в вершины 1, …, $n-1$. Опишем, как устроен выбор их левых концов. Прежде всего выбирается случайная вершина $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Имеется в виду, что $p$ принимает тот или иной конкретный вид с вероятностью $\frac{1}{n-1}$. Что ж, выбрали $p$ и зафиксировали. Это будет тот самый сайт, тематика которого интересна автору сайта $n$. С него он иногда будет копировать ссылки. Теперь укажем первое ребро, исходящее из $n$. Для этого бросим «кривую» монетку, которая с вероятностью $\alpha$ ложится кверху орлом и с вероятностью $1-\alpha$ ложится кверху решкой. Если выпала решка, то отправляем наше ребро в первую по величине вершину среди тех, на которые ссылается сайт $p$. Иными словами, с вероятностью $1-\alpha$ мы копируем первую ссылку с сайта $p$. Если выпал орел, то мы ничего не копируем, а случайно выбираем вершину среди $\{1, \dots, n-1\}$ и отправляем ребро в нее. Второе ребро, исходящее из $n$, ищется точно так же. С вероятностью $1-\alpha$ оно идет во вторую по величине вершину из числа тех, на которые ссылается $p$; с вероятностью $\alpha$ его левый конец выбирается случайно. И так далее. Поскольку на каждом шаге построения очередная вершина испускает $m$ ребер, то у $p$ ровно $m$ соседей, и описанную процедуру мы сможем проделать необходимые $m$ раз.

Можно показать, что с близкой к единице вероятностью величина $\#(n,d)$, определенная на графе $G_{m,\alpha}^n$, ведет себя примерно как $\frac{c}{d^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}}$, где $c$ – константа, зависящая от $m$ и $\alpha$. Результат замечательный, так как снова при правильном подборе $\alpha$ мы можем получить любой показатель степени $d$, больший двойки, и, в частности, показатель 2,3. В последнем случае вероятность копирования довольно близка к единице.

### И это все?

Вопрос, поставленный в заголовке этого раздела, вполне может прийти в голову пытливому читателю. Да, конечно, мы рассказали о паре идей, красиво объясняющих закономерности в «жизни» интернета – закономерности, которые поначалу казались столь удивительными. Но ведь ясно, что у описанных моделей есть масса недостатков.

Например, в графах, которые могут возникнуть в рамках моделей, каждая вершина имеет *фиксированную* исходящую степень. Ничего подобного в интернете нет! По сути, получается, что ориентация в смоделированных графах носит весьма условный характер. Вряд ли структура графов сильно поменяется, если мы снимем с ребер все «стрелки».

Кроме того, ясно, что в моделях у более старых вершин гораздо больше шансов иметь большую входящую степень, нежели у более новых вершин. Это заведомо плохо согласуется с новостными «взрывами», которые ежедневно случаются в интернете: едва появляется страница с важной новостью, как на нее приходят тысячи ссылок. Мы уж не говорим о том, что сайты, страницы и ссылки на них зачастую умирают, и это тоже никак не отражено в моделях.

Разумеется, люди, которые занимаются исследованиями сети, прекрасно все это понимают. И к настоящему времени придумано очень много разных моделей интернета, которые куда более адекватны реальности, чем модели Боллобаша–Риордана, Бакли–Остгуса или модели копирования. Это огромная увлекательная область теории *случайных графов*, которую еще предстоит развивать и систематизировать. Пафос рассмотренных нами примеров в том, что они как нельзя лучше демонстрируют, насколько простыми могут быть принципы, лежащие в основе весьма сложных явлений. А до полного решения проблемы далеко, и это только приятно: нынешнему читателю наверняка найдется, чем заняться, если он захочет исследовать веб-графы.

На этом можно было бы поставить точку, но мы еще скажем пару слов о приложениях моделей к практике поиска в интернете.

### Об одном приложении

Давайте рассмотрим один из видов спамерской деятельности. А именно, поговорим о «линковых кольцах». Сразу заметим, что название сложилось исторически: когда-то спамеры, желая обмануть поисковую систему и повысить свои позиции в поисковой выдаче, цитировали друг друга по кругу, т.е. $A_1$ ставил ссылку на $A_2$, $A_2$ – на $A_3$,…, $A_n$ – на $A_1$. Такую схему быстро научились изобличать, спамерам пришлось стать хитрее, но название «линковое кольцо» осталось.

Сейчас типичная конструкция – это своего рода двудольный граф (рис.2). Вершины из (условно) правой доли – это покупатели ссылок, те, кто таким образом надеется показать, что имеет высокий «индекс цитирования», и потому должен быть поднят на самый верх в поисковой выдаче. Вершины из левой доли – это продавцы ссылок. Последние – вовсе не обязательно какие-то «маргиналы». Напротив, часто ссылки покупают у вполне респектабельных владельцев, которым понадобились деньги на решение каких-либо проблем: с точки зрения поисковой системы, сайт, процитированный респектабельным сайтом, сам становится кандидатом в члены «клуба уважаемых граждан». Ребра в линковом кольце идут, в основном, слева направо; также много ребер может быть внутри левой доли (как просто за счет респектабельности, так и ради «накрутки»).

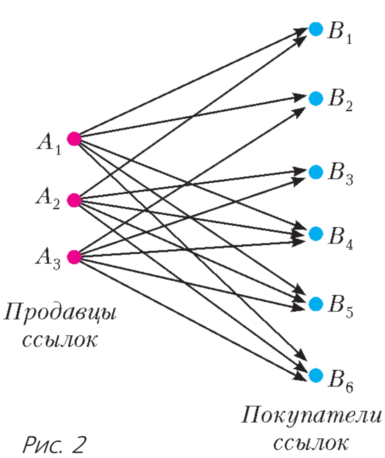


Рис. 2

Задача хорошей поисковой системы состоит в автоматическом выявлении недобросовестных владельцев. Почему автоматическом? А потому что тех же линковых колец *сотни тысяч* (!) и выловить их «руками» просто физически невозможно. Но как научить машину отличать кольцо от структуры, которая кольцом не является?

Представим себе, что у нас есть идеальная (или просто достаточно адекватная) модель интернета без спама. Подсчитаем в этой модели вероятность возникновения ребра между вершинами заданных входящих степеней. Иными словами, про вершины $A$ и $B$ известно, что $\operatorname{indeg} A = a$, $\operatorname{indeg} B = b$. И пусть, при условии этого знания, вероятность ребра из $A$ в $B$ равна $f(a,b)$ (соответственно, вероятность ребра из $B$ в $A$ равна $f(b,a)$).

Пусть теперь у нас есть кусок интернета, который, возможно, является кольцом. Обозначим $A_1, \ldots, A_k$ – вершины левой доли, а $B_1, \ldots, B_l$ – вершины правой доли. Величины входящих степеней обозначим, соответственно, $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_l$. Найдем $M = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} f(a_i, b_j)$. По сути, $M$ – это ожидаемое число ребер, которые в «хорошем» интернете идут из левой доли нашей структуры в ее правую долю. Пусть, наконец, реальное количество ребер «слева направо» равно $\mu$. И все понятно: остается лишь сравнить $M$ и $\mu$. Если ожидаемое число ребер меньше реального, то, наверное, структура аномальная.

Конечно, всегда есть вероятность ошибки. И цена вопроса может оказаться очень высокой. Поэтому обычно сайты в изловленных кольцах не напрямую понижают в выдаче; им лишь присваивают некоторую числовую характеристику, зависящую от $M$ и $\mu$, а машина аккуратно учитывает эту характеристику при ранжировании документов по запросу.

**Список литературы**


1. *А.М.Райгородский*. Модели случайных графов. – М: МЦНМО, 2011.
2. *B.Bollobás*. Random Graphs, Second Edition. – Cambridge Univ. Press, 2001.
3. *E.A.Grechnikov*. An estimate for the number of edges between vertices of given degrees in random graphs in the Bollobás–Riordan model. – Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 1 (2011), №2, p. 40–73.

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2012» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2269» или «Ф2275». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).***

***В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.***

***Задачи М2269а, М2270, М2271, М2273, М2274 предлагались на XXXIII Турнире городов, задачи М2270, М2272, М2274 – на LXXV Московской математической олимпиаде.***

## Задачи М2269–М2275, Ф2275–Ф2282

**М2269.** Дано натуральное число $n \geq 5$. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что из числа $n$ можно получить факториал какого-нибудь натурального числа: а) не более чем за 4 хода; б) не более, чем за 2 хода; в) при $n > 50$ – за 1 ход.

*И.Богданов*

**М2270.** В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «–». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более $n$ ходов.

*А.Канель-Белов*

**М2271.** а) На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

б) Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге.

*А.Шаповалов*

**М2272.** Дан треугольник $ABC$ и прямая $l$. Обозначим через $l_a, l_b, l_c$ прямые, симметричные $l$ относительно сторон треугольника, а через $I_l$ – центр окружности, вписанной в треугольник, образованный прямыми $l_a, l_b, l_c$. Найдите геометрическое место точек $I_l$.

*А.Заславский*

**М2273.** В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные коробки пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются до тех пор, пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.

*А.Шень*

**М2274.** а) В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь $n$-го прямоугольника равна $n^2$. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

б*) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа $N$ найдутся квадраты суммарной площади больше $N$?

*А.Бердников*

**М2275*.** Назовем тетраэдр *интересным*, если все его грани являются прямоугольными треугольниками, а длины всех шести ребер равны натуральным числам. Интересные тетраэдры существуют, таковым является, например, тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = 153$, $BC = 104$, $CD = 672$, $AC = 185$, $BD = 680$, $AD = 697$. Докажите, что существует бесконечно много интересных тетраэдров, никакие два из которых не подобны.

*Р.Сарбаш*

**Ф2275.** Спутник массой 3 т летает на высоте 300 км над поверхностью Земли по почти круговой орбите. Сила сопротивления, действующая на спутник, равна 0,01 Н. На сколько уменьшится высота полета спутника за 1 месяц полета?

*Ю.Спутников*

**Ф2276.** Три невесомых стержня скреплены шарнирно друг с другом и образуют треугольник, находящийся в вертикальной плоскости. Один из стержней лежит на гладком горизонтальном полу, а два других стержня образуют с горизонтом углы $\alpha$ и $\beta$. К верхнему углу треугольника на вертикальной нити подвесили груз массой $m$. Система находится в равновесии, хотя и в неустойчивом. С какой силой растянут горизонтальный стержень?

*С.Татиков*

**Ф2277.** В состав рычажных весов входят штатив, коромысло, опирающееся на штатив через призму из твердого сплава, и две подвешенные на коромысле чашки. Легкие рычаги, удерживающие чашки на коромысле, опираются на коромысло тоже твердосплавными призмами. Расстояния от оси вращения призмы коромысла до мест опоры на коромысло чашечных призм одинаковы. Оси вращения призмы коромысла и опорных углов чашечных призм лежат в одной плоскости. Период малых колебаний коромысла без чашек равен $T_0$. Суммарная масса чашек равна $m_1$. Когда на чашках весов ничего нет, период малых колебаний весов вблизи положения равновесия равен $T_1$. Каким будет период колебаний весов $T_2$, если на обе чашки положить одинаковые грузы массой $m_2$ каждый?

*В.Сергеев*

**Ф2278.** Внук, играя с дедушкиными очками, получает четкие (резкие) изображения солнца на экране и на тонкой полоске белой бумаги. Линзы очков располагаются между солнцем и экраном, а полоска бумаги находится между солнцем и линзами. Расстояние от линзы до резкого изображения солнца на экране равно 20 см. На белой полоске бумаги резкие изображения получаются при двух расстояниях между полоской и линзами, а именно: при 2 см и при 55 см. Каков коэффициент преломления стекла, из которого сделаны линзы? Считайте, что поверхности раздела стекло–воздух для линз сферические. Каковы радиусы кривизны этих поверхностей?

*А.Дедушкин*

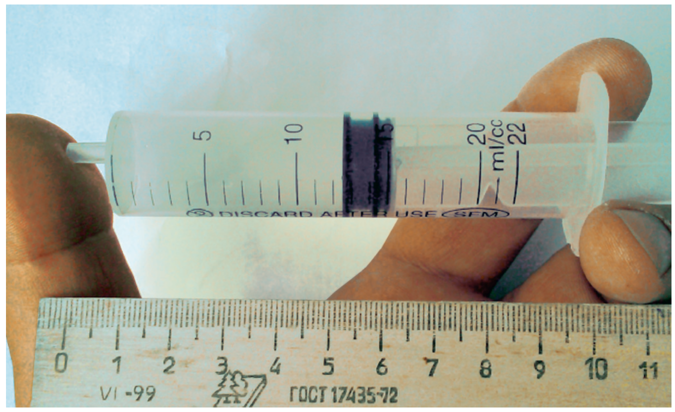
**Ф2279.** К потолку подвешена тонкая гибкая, но нерастяжимая цепочка с равномерным распределением массы $M$ по длине $L$. В положении равновесия цепочка вертикальна. По ее нижнему концу слегка щелкают в горизонтальном направлении, и волна возмущения распространяется вверх к потолку, а после отражения от потолка – вниз к свободному концу. Сколько времени длится это путешествие волны (вверх – вниз)?

*Ц. Почкин*

**Ф2280.** При сгорании 1 кг бензина выделяется количество теплоты $4 \cdot 10^7$ Дж. Плотность бензина 0,8 кг/л. Автомобиль «Жигули» массой 900 кг при езде по прямой дороге на крейсерской скорости 90 км/ч расходует 7 л на каждые 100 км в безветренную погоду. КПД двигателя автомобиля 30%. При движении с постоянной скоростью мощность нужна для того, чтобы преодолевать трение о воздух. На сколько больше бензина будет тратить автомобиль, если он будет ехать с той же скоростью в горку с подъемом 1 м на каждые 100 м пути при встречном ветре со скоростью 10 м/с?

*Ж.Игульский*

**Ф2281.** Шприц без иглы наполовину заполнен водой, пузырьков воздуха внутри нет, а выходное отверстие закрыто, например, пальцем (см. рисунок). С какими силами нужно тянуть в разные стороны шприц за




корпус и поршень за ручку, чтобы вода внутри закипела, если ее начальная температура 24 °С? Трением поршня о стенки можно пренебречь. Давление воздуха $p_0$ = 100кПа. Недостающие данные отыщите самостоятельно.

*С.Варламов*

**Ф2282.** На горизонтальный стол, покрытый сукном, поставили игральный кубик массой 3,5 г и длиной ребра 18,5 мм. Маленький узелок на ткани, находящийся возле середины ребра кубика, не дает кубику скользить в направлении, перпендикулярном этому ребру. Оцените минимальную скорость ветра, дующего над столом и обдувающего кубик, при которой он опрокинется через узелок и покатится по столу.

*А.Ветров*

## Решения задач М2254–М2260, Ф2260–Ф2267

**М2254.** *Существуют ли 10 попарно различных рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них является целым числом, а произведение любых трех – нет?*

**Ответ**: нет.

Предположим, что такие числа существуют. Пусть $a$, $b$, $c$ – некоторые три из них. Тогда произведение $p = abc$ – нецелое рациональное число: $p = \frac{m}{n}$, где $m$ – целое, $n > 1$ – натуральное и НОД$(m, n) = 1$. Тогда $p^2 = \frac{m^2}{n^2}$ – тоже нецелое число. С другой стороны, $p^2 = (abc)^2 = (ab) \cdot (bc) \cdot (ca)$ – целое число. Получено противоречие.

Отметим, что наборы из $n$ рациональных *нецелых* чисел таких, что произведение любых двух из них является целым числом, существуют.

*О.Подлипский*

**M2255.** *В выпуклом четырехугольнике ABCD углы ABC и ADC – прямые. На сторонах AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно так, что KLMN – прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN.*

Пусть $S$ – середина $AC$, а $P$ и $Q$ – середины $KL$ и $MN$ соответственно (рис.1). Достаточно доказать равенство отрезков $SQ$ и $SP$ (если $SP = SQ$, то точка $S$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $PQ$, т.е. на средней линии прямоугольника $KLMN$).

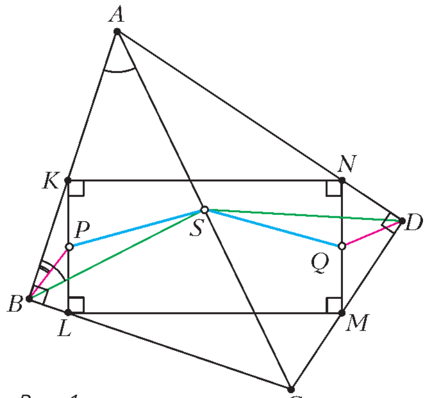


Рис. 1

Из прямоугольных треугольников $ABC$ и $ADC$: $BS = AS = DS$, $\angle ABS = \angle BAC$, $\angle ADS = \angle DAC$. Из прямоугольных треугольников $KBL$ и $DMN$: $BP = KP = NQ = DQ$, $\angle ABP = \angle BKP = 90° - \angle AKN$, $\angle ADQ = \angle DNM = 90° - \angle ANK$. Далее, $\angle PBS = |\angle ABS - \angle ABP| = |\angle BAC + \angle AKN - 90°|$. Аналогично получаем $\angle QDS = |\angle DAC + \angle ANK - 90°|$. Так как $(\angle BAC + \angle AKN - 90°) + (\angle DAC + \angle ANK - 90°) = \angle KAN + \angle AKN + \angle ANK - 180° = 0$, то $\angle PBS = \angle QDS$. Получаем, что треугольники $BPS$ и $DQS$ равны по первому признаку, откуда $SP = SQ$, что и требовалось.

Отметим и другой подход к этой задаче (рис.2). При параллельном переносе на вектор $\overline{LK} = \overline{MN}$ треугольник $LMC$ перейдет в треугольник $KNE$. Так как $CL \perp AK$, то $EK \perp AK$. Аналогично, $EN \perp AN$. Середина $R$ отрезка $AE$ является центром окружности, описанной вокруг четырехугольника $AKEN$, поэтому $R$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $KN$. Но $RS \parallel EC \parallel KL$, значит, $RS \perp KN$, и поэтому $S$ тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $KN$.

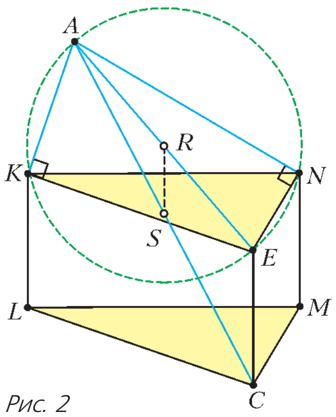


Рис. 2

*Д.Швецов*

**M2256.** *В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две непустые группы так, что любая команда первой группы одержала ровно n побед, а любая команда второй группы – ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?*

**Ответ:** не могло.

Предположим, что $m \neq n$. Всего в турнире с участием 73 команд проводится $\frac{73 \cdot 72}{2} = 36 \cdot 73$ игр. Пусть $x$ команд одержали по $n$ побед, а остальные $73 - x$ команд – по $m$ побед. Тогда получаем равенство $xn + (73 - x)m = 36 \cdot 73$, откуда $x(n - m) = (36 - m) \cdot 73$. Число 73 – простое, поэтому на него делится либо множитель $x$, либо множитель $n - m$. Первое невозможно, так как $x < 73$. А второе невозможно, так как $n < 73$, $m < 73$, а следовательно, $0 < |n - m| < 73$.

*Н.Агаханов*

**M2257.** *Пусть $\alpha$ не равно $\frac{\pi m}{6}$ ни для какого целого $m$. Известно, что среди чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, …, $\sin n\alpha$ есть иррациональные. Докажите, что таких чисел не меньше $\frac{n}{3}$.*

Сделаем несколько вводных замечаний.

Если $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$ (здесь и далее $\mathbb{Q}$ обозначает множество рациональных чисел), то для любого натурального $n$ верно: $\cos n\alpha \in \mathbb{Q}$. Для доказательства достаточно воспользоваться формулой

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha \qquad (1)$$

и применить индукцию по $n$ (с базой $n = 0$ и $n = 1$).

Если же $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$ и $\sin\alpha \in \mathbb{Q}$, то и $\sin n\alpha \in \mathbb{Q}$ для любого натурального $n$ – достаточно воспользоваться формулой

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha \qquad (2)$$

и применить индукцию по $n$.

Таким образом, из условия задачи следует, что хотя бы одно из чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ иррационально. Так как $\sin\alpha \neq 0$, то хотя бы одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ иррационально. Для решения задачи будет достаточно доказать, что для каждого $n \geq 2$ в тройке $\sin(n-1)\alpha$, $\sin n\alpha$, $\sin(n+1)\alpha$ подряд идущих чисел нашей последовательности хотя бы одно число иррационально. Действительно, если $n$ делится на 3, то данные числа разбиваются на $n/3$ таких троек. Если $n = 3k + 2$, то выделяем первые 2 числа $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, а остальные разбиваем на $k$ троек. Если $n = 3k + 1$ и $\sin\alpha \notin \mathbb{Q}$, то выделяем первое число и $k$ троек. Если же $n = 3k + 1$ и $\sin\alpha \in \mathbb{Q}$, то выделяем первую четверку чисел (в ней $\sin 2\alpha \notin \mathbb{Q}$ и $\sin 4\alpha = \sin 2\alpha\cos 2\alpha \notin \mathbb{Q}$, поскольку $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ – рационально и не равно 0) и $k - 1$ троек.

Предположим, что, напротив, при некотором $n \geq 2$ все три числа $\sin(n-1)\alpha$, $\sin n\alpha$, $\sin(n+1)\alpha$ рациональны.

Будем пользоваться следующей известной **леммой**[1] (докажем ее в конце решения). *Пусть $\frac{x}{\pi}$ рационально,*

[1] Утверждение леммы бывает полезно для решения задач – см., скажем, решение задачи М2177 в «Кванте» №6 за 2010 год.

*и хотя бы одно из чисел* $\sin x$, $\cos x$ *рационально. Тогда* $x$ *является числом вида* $\frac{\pi m}{6}$ *для некоторого целого* $m$.

Если $\sin n\alpha = 0$, то $\cos n\alpha = \pm 1$, значит, из формулы

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos n\alpha \qquad (3)$$

следует, что $\sin\alpha = \pm\sin(n+1)\alpha \in \mathbb{Q}$. Из последнего равенства вытекает, что $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$, и по лемме получается противоречие с условием $\alpha \neq \frac{\pi m}{6}$. Значит, $\sin n\alpha \neq 0$, и из формулы (2) следует, что $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$ (и, значит, $\sin\alpha \notin \mathbb{Q}$), откуда по формуле (1) $\cos n\alpha \in \mathbb{Q}$. Если $\cos n\alpha = 0$, то $n\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$, и опять получаем противоречие с леммой. Если же $\cos n\alpha \neq 0$, то из (3) следует, что $\sin\alpha \in \mathbb{Q}$ – противоречие.

Остается доказать лемму. Достаточно доказать ее в случае, когда $\cos x \in \mathbb{Q}$ (если $\sin x \in \mathbb{Q}$, то задача сводится к случаю $\cos x \in \mathbb{Q}$ заменой $x$ на $\frac{\pi}{2} - x$).

Итак, пусть $\cos x \in \mathbb{Q}$, т.е. $\cos x = \frac{a_1}{b_1}$, где $a_1$ – целое, $b_1$ – натуральное, причем $\text{НОД}(a_1, b_1) = 1$. Если $b_1 = 1$, то $\cos x = 0$ или $\cos x = \pm 1$. Если $b_1 = 2$, то $\cos x = \pm\frac{1}{2}$. Рассмотренные возможности приводят к значениям $x$ вида $\frac{m\pi}{6}$ для некоторого целого $m$. Остается доказать, что $b_1 > 2$ невозможно, т.е. при $b_1 > 2$ ни при каком натуральном $n$ число $\cos nx$ не равно $\pm 1$. Положим $\cos nx = \frac{a_n}{b_n}$, где $a_n$ – целое, $b_n$ – натуральное, причем $\text{НОД}(a_n, b_n) = 1$.

Предположим, что $b_1$ делится на простое нечетное $p$, причем $b_1$ делится на $p^t$ и не делится на $p^{t+1}$. Индукцией по $n$ покажем, что $b_n$ делится в точности на $p^{nt}$ (т.е. делится на $p^{nt}$ и не делится на $p^{nt+1}$). База индукции при $n = 0$ и $n = 1$, очевидно, верна. Пусть утверждение верно для всех $b_k$, где $k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда из (1) следует, что $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_1a_n}{b_1b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$. По предположению индукции дробь $\frac{2a_1a_n}{b_1b_n}$ после сокращения имеет знаменатель, делящийся в точности на $p^{t+nt} = p^{t(n+1)}$, а дробь $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ несократимая, и ее знаменатель делится в точности на $p^{t(n-1)}$. Так как $t(n+1) > t(n-1)$, после вычитания этих дробей получится несократимая дробь, знаменатель которой $b_{n+1}$ делится в точности на $p^{t(n+1)}$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $b_1 = 2^{t+1}$, $t \geq 1$. Индукцией по $n$ покажем, что $b_n = 2^{nt+1}$. При $n = 0$ и $n = 1$ это так. Пусть утверждение верно для всех $b_k$, где $k = 0, 1, \ldots$ …, $n$. Тогда из (1) следует, что $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_1a_n}{b_1b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$. По предположению индукции дробь $\frac{2a_1a_n}{b_1b_n}$ после сокращения (на 2) имеет знаменатель $2^{(t+1)+(nt+1)-1} = 2^{(n+1)t+1}$, а дробь $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ – знаменатель $2^{(n-1)t+1}$. После вычитания этих дробей получится несократимая дробь со знаменателем $b_{n+1} = 2^{t(n+1)+1}$.

*В.Сендеров*

**М2258.** *Дан квадрат* $n \times n$. *Изначально его клетки раскрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке, причем хотя бы одна из угловых клеток черная. За один ход разрешается в некотором квадрате* $2 \times 2$ *одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в черный цвет, каждую черную – в зеленый, а каждую зеленую – в белый. При каких* $n$ *за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой черный и белый цвета поменялись местами?*

**Ответ**: при всех $n$, кратных трем.

Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа – те, которые были черными. Заметим, что если какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того чтобы клетка первого типа стала черной, ее нужно перекрасить $3k + 1$ раз при некотором целом $k$ (для разных клеток $k$ может быть разным). Значит, если $a$ – количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K + a$ при некотором целом $K$. Чтобы клетка второго типа стала белой, ее нужно перекрасить $3m + 2$ раза. Значит, если $b$ – количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M + 2b$.

Далее, в любом квадрате $2 \times 2$ клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Тогда $3K + a = 3M + 2b$, откуда $a + b = 3(M - K + b)$, т.е. общее количество клеток $a + b$ делится на три. Значит, $n^2$ кратно трем, а поэтому и $n$ кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты $3 \times 3$. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая – либо угловые клетки белые, либо черные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае – по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

*Замечание.* В доказательстве делимости $n$ на 3 можно рассматривать не все $n^2$ клеток доски, а $n$ клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду – скажем, $n$ клеток, примыкающих к нижней стороне.

*Б.Трушин*

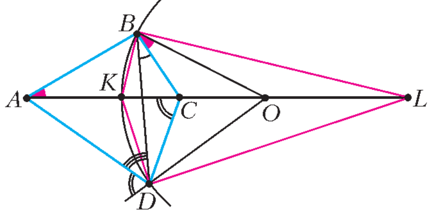
**М2259.** *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ *таков, что* $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. *Докажите, что* $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180°$.

Из условия следует, что $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$. Если эти отношения равны 1, то треугольники $ABC$ и $ADC$ равнобедренные, и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой $BD$; значит,

$$\angle BAC+\angle CBD+\angle DCA+\angle ADB=$$
$$=\angle BAC+\angle ABD+\angle DAC+\angle ADB=$$
$$=\angle ABD+\angle ADB+\angle DAB=180^\circ,$$

что и требовалось.

Пусть теперь, для определенности, $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}>1$. Пусть $BK$ и $BL$ – внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника $ABC$ (см. рисунок). Тогда $\frac{AK}{KC}=\frac{AL}{LC}=$




$=\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$; значит, $DK$ и $DL$ – внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника $ADC$. Отсюда следует, что $\angle KBL=\angle KDL=90^\circ$, и четырехугольник $BKDL$ вписан в окружность с центром в точке $O$ – середине отрезка $KL$.

Из равнобедренного треугольника $OKB$ получаем $\angle OBK=\angle OKB=\angle ABK+\angle KAB=\angle CBK+\angle CAB$, откуда $\angle CAB=\angle OBK-\angle CBK=\angle OBC$. Значит, $\angle CAB+\angle CBD=\angle OBC+\angle CBD=\angle OBD$. Аналогично, из равнобедренного треугольника $ODK$ получаем $\angle ODA=\angle ODK+\angle KDA=\angle OKD+\angle CDK=180^\circ-\angle DCK$, откуда $\angle DCA+\angle ADB=(180^\circ-\angle ODA)+\angle ADB=180^\circ-\angle ODB$.

Итак, сумма всех четырех углов в условии равна $\angle OBD+180^\circ-\angle ODB=180^\circ$, поскольку треугольник $OBD$ равнобедренный. Это и требовалось доказать.

Отметим, что используемая в решении окружность (описанная окружность четырехугольника $BKDL$) является *окружностью Аполлония* для точек $A$ и $C$.

*И.Богданов, К.Кноп*

**М2260.** *Сто неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ расставлены по кругу так, что сумма любых трех подряд идущих чисел не превосходит 1 (т.е. $x_1+x_2+x_3\le 1$, $x_2+x_3+x_4\le 1$, …, $x_{100}+x_1+x_2\le 1$). Найдите наибольшее значение суммы*

$$S=x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_6+\ldots+x_{99}x_1+x_{100}x_2.$$

**Ответ:** $\frac{25}{2}$.

Положим $x_{2i}=0$, $x_{2i-1}=\frac{1}{2}$ для всех $i=1,\ldots,50$. Тогда $S=50\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$. Итак, остается доказать, что $S\le\frac{25}{2}$ для всех значений $x_i$, удовлетворяющих условию.

При любом $i$ от 1 до 50 имеем $x_{2i-1}\le 1-x_{2i}-x_{2i+1}$, $x_{2i+2}\le 1-x_{2i}-x_{2i+1}$. По неравенству о средних,

$$x_{2i-1}x_{2i+1}+x_{2i}x_{2i+2}\le$$
$$\le\left(1-x_{2i}-x_{2i+1}\right)x_{2i+1}+x_{2i}\left(1-x_{2i}-x_{2i+1}\right)=$$
$$=\left(x_{2i}+x_{2i+1}\right)\left(1-x_{2i}-x_{2i+1}\right)\le$$
$$\le\left(\frac{\left(x_{2i}+x_{2i+1}\right)+\left(1-x_{2i}-x_{2i+1}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Складывая получившиеся неравенства для $i=1, 2, \ldots$ …, 50, приходим к нужному неравенству

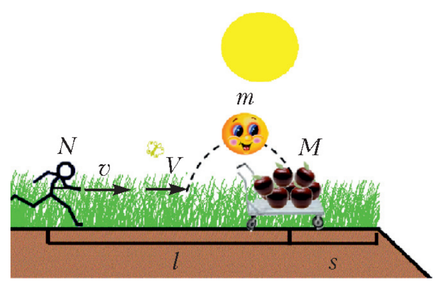
$$\sum_{i=1}^{50}\left(x_{2i-1}x_{2i+1}+x_{2i}x_{2i+2}\right)\le 50\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{2}.$$

*Замечание.* Предложенное решение показывает, что верен следующий несколько более общий факт. Пусть $2n$ неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_{2n}$ записаны в ряд, и пусть $x_i+x_{i+1}+x_{i+2}\le 1$ для всех $i=1, 2, \ldots, 2n-2$. Тогда $\sum_{i=1}^{2n-2}x_ix_{i+2}\le\frac{n-1}{4}$.

Исходное неравенство получается как частный случай для ряда из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}, x_1, x_2$.

*И.Богданов*

**Ф2260.** *а) Аппетитный колобок массой $m$ = 0,1 кг спасается бегством от господина N, бегущего со скоростью $v$ = 3 м/с (см.рисунок). Но колобок хочет*




*не только спастись сам, но и спасти свои запасы яблок. Тележка с яблоками общей массой $M$ = 0,4 кг находится на расстоянии $s$ = 2 м от крутого ската. Колобок разбегается до скорости $V$ = 2 м/с и прыгает на тележку. Как только тележка докатывается до ската, никакой господин N догнать ее уже не сможет. Спасется ли колобок, если расстояние от господина N до тележки в момент соприкосновения колобка и тележки равно $l$ = 4 м? Размерами тележки пренебречь, все объекты двигаются по одной прямой, трения нет, сопротивление воздуха отсутствует, вулканической и радиационной активности в радиусе 84 км не наблюдается.*

*б) Найдите, какой должна быть масса колобка, чтобы он мог спастись. Ответ дайте в виде неравенства.*

Поскольку по условию трением можно пренебречь, для системы тел колобок – тележка сохраняется горизонтальная составляющая импульса. После того как колобок вспрыгнет на тележку, скорость тележки вместе с колобком станет равной

$$V_1=\frac{mV}{M+m}.$$

Время движения колобка на тележке к границе, за которой им гарантировано спасение, равно

$$t_1 = \frac{s}{V_1} = \frac{s(M+m)}{mV}.$$

А господину $N$, чтобы достичь границы, нужно время

$$t_2 = \frac{l+s}{v}.$$

Проверим, сможет ли колобок с заданной в условии массой спастись вместе с яблоками:

$$t_1 = \frac{2\ \text{м}\cdot 0{,}5\ \text{кг}}{0{,}1\ \text{кг}\cdot 2\ \text{м/с}} = 5\ \text{с},\quad t_2 = \frac{6\ \text{м}}{3\ \text{м/с}} = 2\ \text{с}.$$

Оказывается, колобку массой 0,1 кг спастись не удастся. Значит, колобку нужно быть «солиднее», т.е. «массивнее»! Запишем соответствующее неравенство:

$$t_1 < t_2,\ \text{или}\ \frac{s(M+m)}{mV} < \frac{l+s}{v},$$

из которого найдем необходимое условие на массу колобка:

$$m > \frac{Mvs}{lV - s(v-V)} = 0{,}4\ \text{кг}.$$

*С.Иванов*

**Ф2261.** *По горизонтальному прямому участку железной дороги движется по инерции платформа массой $M = 90$ кг. Колеса платформы очень легкие, трением о рельсы можно пренебречь. В некоторый момент времени, когда скорость платформы была $v = 10$ м/с, пошел дождик из ежиков, каждый из которых имеет массу $m = 0{,}5$ кг. Каждую секунду на платформу падает один ежик и остается на ней, так как борта платформы достаточно высокие. У всех ежиков установившаяся скорость падения имеет горизонтальную составляющую, равную $u = 1$ м/с и направленную навстречу первоначальной скорости платформы. На какое расстояние $L$ от положения в момент начала дождя сместится платформа к тому моменту, когда ее скорость станет равной нулю? (При расчетах разрешается пользоваться компьютером.)*

Когда на платформу упал $N$-й ежик, скорость платформы стала равной

$$v_N = \frac{Mv - Nmu}{M + Nm}.$$

С такой скоростью платформа движется в течение промежутка времени $\tau = 1$ с до момента падения следующего ежика. Скорость платформы с ежиками станет равной нулю через время

$$t = \tau\frac{Mv}{mu} - \tau = 1800\ \text{с} - 1\ \text{с},$$

т.е. примерно через 0,5 часа после начала дождя. Перемещение платформы равно сумме перемещений за 1799 промежутков времени от момента падения 1-го ежика до момента падения 1800-го ежика. Для нахождения этой суммы можно, конечно, использовать компьютер. Вот результат: $L = 2942{,}837691$ м $\approx 2942{,}84$ м. Однако ответ можно довольно точно найти и аналитически. Поскольку масса каждого ежика значительно меньше массы платформы, изменения скорости платформы при падениях ежиков весьма малы. Следовательно, суммирование отрезков можно заменить интегрированием. Учтем, что текущее значение параметра, по которому проводится интегрирование, отличается от целого числа. Поэтому, например, для отрезка времени от момента начала дождя (падения первого ежика) до момента падения второго ежика число $N$ равно 1, а текущий параметр $x$ при интегрировании выберем так, чтобы его значение менялось в течение первой секунды от 0,5 до 1,5. Тогда

$$L = \sum_{N=1}^{\frac{Mv}{mu}} \frac{Mv - Nmu}{M + Nm}\tau \approx u\tau\int_1^{\frac{Mv}{mu}} \left(\frac{\frac{Mv}{mu} + 0{,}5 - x}{\frac{M}{m} - 0{,}5 + x}\right)dx =$$

$$= \left(1980\ln\frac{1979{,}5}{180{,}5} - 1799\right)\ \text{м} = 2942{,}8402\ \text{м}.$$

Заменой переменной $y = x - 0{,}5 + M/m$ написанное выражение было сведено к интегралу вида $\int\left(\frac{A}{y}dy - Bdy\right)$. В нем $A$ и $B$ – константы. Как видно, точное значение $L$, найденное суммированием с помощью компьютера, и значение, полученное аналитически, отличаются настолько мало, что относительная ошибка меньше одной миллионной: $\Delta L/L \approx 0{,}85\cdot 10^{-6}$.

*Д.Ежов*

**Ф2262.** *Один конец однородной цепочки массой $M$ и длиной $L$ закрепили в лапке штатива. При этом вся цепочка повисла, вытянувшись в вертикальном направлении и не касаясь пола. Затем другой ее конец подняли над местом закрепления первого конца на высоту $H < L$ и начали медленно перемещать в горизонтальном направлении до тех пор, пока касательная к цепочке вблизи ее закрепленного конца не стала горизонтальной. Какова сила натяжения цепочки вблизи ее нижнего конца? А вблизи верхнего?*

Несложно показать, что вблизи верхнего конца сила натяжения цепочки больше, чем вблизи нижнего конца на величину $MgH/L$. Горизонтальная составляющая $F$ силы натяжения цепочки одинакова вдоль всей ее длины. Вертикальная составляющая силы натяжения вблизи верхнего конца цепочки равна $Mg$. Поэтому выполняется такое соотношение:

$$\left(F + Mg\frac{H}{L}\right)^2 = F^2 + (Mg)^2.$$

Раскрывая скобки, найдем натяжение цепочки вблизи ее нижнего конца:

$$F_\text{н} = F = Mg\frac{(L/H) - (H/L)}{2}.$$

Натяжение цепочки вблизи верхнего конца равно

$$F_\text{в} = Mg\frac{(L/H) + (H/L)}{2}.$$

*Ц.Почкин*

**Ф2263.** *Тело представляет собой два склеенных однородных полушара, центры которых совпадают (рис.1). Нижний полушар имеет радиус $R_1$ и сделан из материала с плотностью $\rho_1$, верхний полушар имеет радиус $R_2$ и плотность $\rho_2$. При каких значениях $R_1$, $R_2$, $\rho_1$ и $\rho_2$ положение тела, изображенное на рисунке 1, будет устойчивым?*

Очевидно, положение тела, изображенное на рисунке 1, является положением равновесия, поскольку в этом случае сила тяжести и сила реакции опоры компенсируют друг друга. Для исследования устойчивости равновесия необходимо вывести тело из положения равновесия и исследовать возникшие силы. Если при этом появятся силы, возвращающие тело в положение равновесия, равновесие будет устойчивым, если появятся силы, выводящие тело из положения равновесия, равновесие будет неустойчивым, если же силы будут по-прежнему компенсировать друг друга, равновесие будет безразличным.

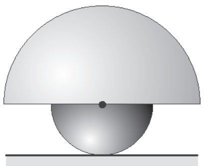


Рис. 1

Итак, отклоним тело от положения равновесия и исследуем действие на него сил. Прямая, вдоль которой действует сила реакции опоры, проходит через общий центр полушаров (так как нижняя поверхность тела – сферическая). Поэтому устойчивость или неустойчивость равновесия определяется точкой приложения силы тяжести: если сила тяжести проходит левее центра (при отклонении тела направо), то его равновесие устойчиво, если правее – неустойчиво, через центр – безразлично. А поскольку точкой приложения силы тяжести является центр тяжести тела, то устойчивость тела определяется положением центра тяжести по отношению к центру полушаров.

Для иллюстрации этого вывода обратимся к рисункам. На рисунке 2,*а* показан случай, когда центр тяжести тела лежит ниже центра полушаров (центр тяжести отмечен крестиком). В этом случае сила тяжести создает момент относительно точки касания, возвращающий тело в положение равновесия, которое, следовательно, является устойчивым. Когда центр тяжести тела лежит выше центра полушаров, момент силы тяжести выводит тело из положения равновесия (рис.2,*б*), и равновесие тела неустойчиво. Если центр тяжести тела совпадает с центром полушаров (рис.2,*в*), сумма моментов сил относительно точки касания равна нулю при любом отклонении тела, и, следовательно, любое положение тела в этом случае является положением безразличного равновесия. Поэтому исследование равновесия тела сводится к нахождению положения его центра тяжести в зависимости от значений величин $R_1$, $R_2$, $\rho_1$ и $\rho_2$.

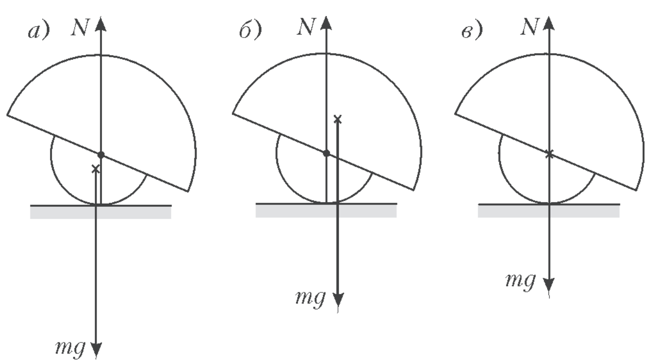



Рис. 2

Для нахождения центра тяжести тела удобно использовать следующий прием. Если тело можно мысленно разделить на такие части, положение центра тяжести каждой из которых известно, то центр тяжести всего тела можно найти как центр тяжести системы материальных точек, массы которых равны массам этих выделенных частей и которые расположены в их центрах тяжести. В применении к нашему телу это означает, что его центр тяжести совпадает с центром тяжести системы двух материальных точек с массами, равными массам верхнего и нижнего полушаров, которые расположены в центрах тяжести верхнего и нижнего полушаров соответственно.

Далее используем соображения размерности и подобия. Для однородного полушара существует единственная характеризующая его величина с размерностью длины – это радиус полушара. Поэтому расстояние от центра каждого полушара до его центра тяжести должно выражаться через его радиус: $r_{\text{цт}} = \alpha R$, где $\alpha$ – безразмерный коэффициент пропорциональности, который определяется только формой тела и не зависит от его размеров. Следовательно, неизвестный коэффициент $\alpha$ одинаков для всех полушаров. Тогда $y$-координата центра тяжести всего тела в системе координат, начало которой находится в центре полушаров, определяется формулой

$$y_{\text{цт}} = \frac{\alpha R_1 m_1 - \alpha R_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\alpha\left(R_1 m_1 - R_2 m_2\right)}{m_1 + m_2}.$$

Конечно, для вычисления координаты центра тяжести необходимо знать коэффициент $\alpha$. Однако в нашей задаче нужно не вычислить координату центра тяжести, а только сравнить ее с координатой центра полушаров – в это сравнение коэффициент $\alpha$ не входит. Действительно, если центр тяжести тела лежит ниже центра полушаров, то при нашем выборе системы координат его координата положительна: $y_{\text{цт}} > 0$, если выше – отрицательна: $y_{\text{цт}} < 0$. Таким образом, из предыдущей формулы следует, что центр тяжести тела лежит ниже центра полушаров, если

$$R_1 m_1 - R_2 m_2 > 0,$$

и выше, если

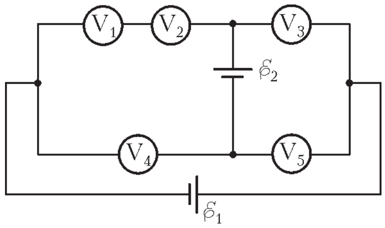
$$R_1 m_1 - R_2 m_2 < 0.$$

Выражая массы полушаров через их плотности и объемы, заключаем, что рассматриваемое тело будет находиться в устойчивом равновесии, если $\rho_1 R_1^4 > \rho_2 R_2^4$, в неустойчивом – при выполнении обратного неравенства и в безразличном – если $\rho_1 R_1^4 = \rho_2 R_2^4$.

*С.Муравьев*

**Ф2264.** *Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из двух батареек с ЭДС*

*$\mathscr{E}_1 = 5$ В и $\mathscr{E}_2 = 2$ В и пяти одинаковых вольтметров. Найдите показания каждого из вольтметров. Сопротивления батареек много меньше сопротивлений вольтметров.*




Поскольку через первый и второй вольтметры текут одинаковые токи, их показания тоже одинаковы: $U_2 = U_1$. Показания остальных вольтметров можно выразить через показание первого вольтметра и ЭДС батареек:

$$U_3 = \mathscr{E}_1 - 2U_1,\ U_4 = 2U_1 - \mathscr{E}_2,\ U_5 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 - 2U_1.$$

Обозначая через $R$ сопротивление каждого из вольтметров, получаем, что сила тока через первую батарейку равна как $U_1/R + (2U_1 - \mathscr{E}_2)/R$, так и $(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 - 2U_1)/R + (\mathscr{E}_1 - 2U_1)/R$. Приходим к уравнению

$$U_1 + (2U_1 - \mathscr{E}_2) = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 - 2U_1) + (\mathscr{E}_1 - 2U_1),$$

из которого находим, что

$$7U_1 = 2\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2,\ \text{и}\ U_1 = \frac{2(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{7} = 2\ \text{В}.$$

Тогда показания других вольтметров оказываются такими:

$$U_2 = U_1 = \frac{2(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{7} = 2\ \text{В},$$

$$U_3 = \frac{3\mathscr{E}_1 - 4\mathscr{E}_2}{7} = 1\ \text{В},$$

$$U_4 = \frac{4\mathscr{E}_1 - 3\mathscr{E}_2}{7} = 2\ \text{В},$$

$$U_5 = \frac{3(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{7} = 3\ \text{В}.$$

*О.Шведов*

**Ф2265.** *У вас есть жесткий штатив с элементами креплений. В магазине имеются детали и оборудование для физических экспериментов. Невесомая пружина с жесткостью каждого метра длины 100 Н/м стоит 100 руб./м и продается только кусками с длинами, которые могут быть равны целому числу дециметров. Грузы с двумя крючками продаются порциями по 1 кг. Каждый груз стоит 10 руб. У вас есть 100 руб. Нужно собрать колебательную систему, в которой пружины могли бы только изменять свою длину, а грузы могли бы двигаться только в вертикальном направлении, с максимально возможным периодом малых колебаний. Как вы распорядитесь имеющимися средствами?*

Период вертикальных колебаний тем больше, чем больше отношение массы колеблющихся грузов к эквивалентной жесткости системы пружин. Массы, естественно, суммируются, а эквивалентная жесткость при последовательном соединении нескольких одинаковых пружин обратно пропорциональна количеству последовательно соединенных пружин. Если приобрести $N$ грузов по 1 кг каждый, то на оставшиеся деньги можно будет приобрести пружину с общей длиной $L = 1\ \text{м} \cdot (100 - N \cdot 10)/100$. Ее жесткость обратно пропорциональна длине. В результате период колебаний будет тем больше, чем больше будет произведение $NL \sim N(10 - N)$. Максимальный период колебаний будет при $N = 5$, т.е. нужно собрать систему из пружины длиной 0,5 м (50 руб.) и пяти грузов общей массой 5 кг (50 руб.).

*П.Максимов*

**Ф2266.** *Маленький шарик находится на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Отношение объемов шарика $V$ и его изображения $v$ равно 16. Линзу отодвинули от шарика вдоль оси дополнительно на расстояние L, и отношение объемов стало равным 81. Какова оптическая сила линзы?*

Для мелких объектов и их изображений, расположенных далеко (в сравнении с их размерами) от фокусов линзы, коэффициент продольного увеличения размеров $\Gamma_{\parallel}$ и коэффициент поперечного увеличения $\Gamma_{\perp}$ связаны соотношением

$$\Gamma_{\parallel} = \Gamma_{\perp}^2.$$

Следовательно, отношение объемов $V/v$ равно

$$\Gamma_{\parallel} \cdot \Gamma_{\perp}^2 = \Gamma_{\perp}^4.$$

Из условия ясно, что после отодвигания линзы от шарика его изображение стало меньше, значит, изображение шарика действительное и уменьшенное. Обозначим через $d$ первоначальное расстояние от шарика до линзы, а через $D$ – оптическую силу линзы. Тогда для тонкой линзы запишем такие соотношения:

$$\frac{1}{d} + \frac{\sqrt[4]{16}}{d} = D,$$

$$\frac{1}{d+L} + \frac{\sqrt[4]{81}}{d+L} = D.$$

Исключая $d$, находим

$$D = \frac{1}{L}\left(\sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{16}\right) = \frac{1}{L}.$$

*С.Варламов*

**Ф2267.** *Плоскость маленького зеркала все время вертикальна. Зеркало находится в руках Буратино, который крутит его равномерно с угловой скоростью 360°/с вокруг вертикальной оси, проходящей ровно через середину зеркала. Мальвина, стоя на расстоянии 1 м от оси вращения, изредка видит свое изображение, пролетающее мимо. Какова скорость движения изображения относительно неподвижной Мальвины в те моменты, когда Мальвина его видит?*

При повороте зеркала на малый угол $\alpha$ изображение смещается на расстояние $2\ \text{м} \cdot \alpha$. Следовательно, скорость движения изображения Мальвины равна

$$2 \cdot 2\pi\ \text{м/с} \approx 12{,}6\ \text{м/с}.$$

*К.Барабас*

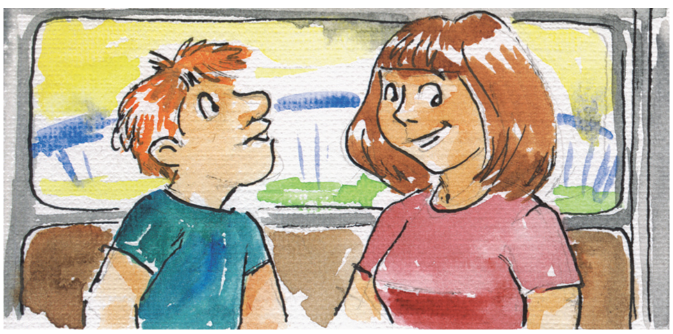
# Задачи

**1.** Перед вами последовательность чисел, начинающаяся с 1:


Каждое следующее число образовано из предыдущего по очень простому правилу. Попробуйте понять, что это за правило, и напишите следующее число последовательности. Эту замечательную последовательность придумал известный математик *Джон Конвей*.

**2.** Когда поезд московского метро из подземного тоннеля выезжает на мост через Москву-реку, в вагоне становится заметно тише. Толя Втулкин, знакомый Квантика, говорит, что это машинист поезда специально уменьшает шум, чтобы он не мешал жителям близлежащих домов. Прав ли Толик?

*С.Дворянинов*



**3.** – Купил я недавно новенькие двухчашечные аптечные весы с набором гирь и разновесок, – рассказывал один аптекарь другому. – Взвесил на них пузырек с микстурой, и выяснилось, что он весит 50 граммов. А когда взвесил сразу два таких же пузырька, их вес составил 64 грамма.

– Как же так? – удивился собеседник.

– Все очень просто! Весы оказались неравноплечными...

Сколько же на самом деле весит пузырек с микстурой?

*Подсказка:* неравноплечные весы увеличивают вес на одной из чашек относительно другой в одно и то же число раз (равное отношению длин плеч весов).

*И.Акулич*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов. Задачи взяты из Конкурса журнала «Квантик».

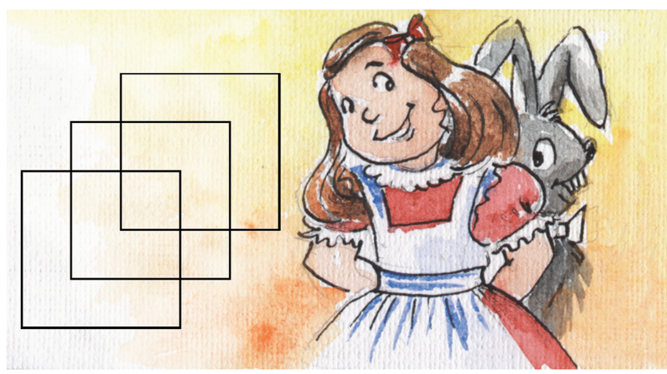
**4.** У пиратов А, Б и В состоялся такой разговор:

А: «У Б – 2 глаза».
Б: «У В – 2 глаза».
В: «У А – 2 глаза».
А: «У нас 2 глаза на троих».
Б: «У нас 3 глаза на троих».
В: «У нас 4 глаза на троих».

Оказалось, что каждый соврал столько раз, сколько у него глаз. Сколько глаз у каждого из пиратов?

*Е.Бакаев*

**5.** Льюис Кэрролл как-то предложил такую задачу. Надо нарисовать следующую конфигурацию, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию:



При этом дополнительно требовалось, чтобы в процессе рисования *никакие линии не пересекались*.

Попробуйте решить задачу Кэрролла. А когда сумеете, попытайтесь решить противоположную задачу: нарисовать фигуру так, чтобы, наоборот, *произошло максимальное возможное число пересечений*. Каково это максимальное число?

*И.Акулич*

*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Кофе с молоком, или Опыты с давлением

А.ГИМЕЛЕВ, С.ДВОРЯНИНОВ

### Начало истории

Однажды мы встретились с другом, которого давно не видели. Начались разговоры. Конечно, о физике и математике. Пришло время кофейной паузы. Вскипятили в чайнике воду, извлекли из холодильника литровый пакет, в котором было немного молока, и… Надо же такому случиться: молока хватило только на две чашки. А на третью ничего не осталось.

– Ничего страшного, – сказал один из нас. На стенках пакета есть немного застывших от холода сливок. Сейчас мы нальем в пакет кипяток, ополоснем его стенки, и этого вполне хватит на чашечку кофе.

Так я и поступил. В пакет из чайника осторожно налил кипяток, плотно завинтил пластмассовую крышку и начал пакет встряхивать. И тут в моей руке пакет как будто ожил… Я почувствовал, как пакет из угловато-прямоугольного моментально превратился в кругло-цилиндрический. И произошло это превращение так неожиданно, что я даже вздрогнул!

Почему же изменилась форма пакета?

Во-первых, интенсивное встряхивание пакета привело к тому, что ускорился процесс теплообмена между кипятком и воздухом, заключенным в пакете. Воздух внутри пакета нагрелся, и его давление на стенки пакета возросло. Во-вторых, встряхивание способствовало более быстрому испарению горячей воды. Водяной пар (а это газ) также увеличил давление внутри пакета. Вспомните – в паровозах сила давления водяного пара приводит в движение целые составы!

А что при этом произошло с объемом пакета?

На первый взгляд, объем пакета измениться не может: на нем четко написано – объем 1 литр. А в действительности? Давайте разберемся.

### Задача Дидоны

Пакет – это пространственное тело. Но прежде обратимся к более простому, плоскому случаю. Рассмотрим несколько прямоугольников с одним и тем же периметром, равным для определенности 24 см, но с разными сторонами $a$ и $b$ и подсчитаем их площади (см. таблицу):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $a \times b$ | 11 | 20 | 27 | 32 | 35 | 36 |

Данные таблицы приводят к такой гипотезе: из всех прямоугольников с одним и тем же периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Это действительно так. Вот доказательство.

Пусть одна сторона нашего прямоугольника $x$, тогда другая сторона $12 - x$, а площадь прямоугольника $S = S(x) = x(12 - x)$. Графиком этой квадратичной функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшее значение функции совпадает с ординатой вершины и получается при $x = 6$, т.е. тогда, когда прямоугольник является квадратом.

Хорошо, с прямоугольниками все ясно. А если брать не только прямоугольники, но и другие фигуры? Допустим, что у нас есть линия, длина которой равна 24 см. Как надо расположить эту линию на плоскости, чтобы она ограничивала фигуру с наибольшей возможной площадью? Эта задача известна с древних времен, ее называют *изопериметрической задачей*, или *задачей Дидоны*. По выделенным ключевым словам о ней можно найти информацию в интернете. Это интересно. Рассказывал об этой задаче и журнал «Квант» (см., например, статью И.Шарыгина «Миф о Дидоне и изопериметрическая задача», опубликованную в «Кванте» №1 за 1997 г.). Сейчас мы лишь скажем, что линия эта должна быть окружностью и ограничивать она должна, стало быть, круг.

Аналогичное утверждение имеет место и для пространственных тел, в том числе – для пакета из-под молока. Площадь поверхности этого пакета постоянна, и вначале она ограничивает объем 1 литр. После наливания в пакет кипятка избыточное давление нагретого воздуха и водяного пара распирает пакет изнутри, подобно тому, как оно надувает резиновый воздушный шарик (или мыльную пленку, когда вы пускаете мыльные пузыри). Так вот, не случайно, что в этом случае получается именно шарик, а не параллелепипед или какая-нибудь пирамида. Доказано, что из всех тел с одинаковой площадью поверхности наибольший объем имеет шар.

Вот и наш пакет «стремится» принять такую форму, чтобы получился наибольший объем. При этом давление внутри пакета окажется наименьшим, и энергия, запасенная этим сжатым воздухом, будет наименьшей. А это есть обязательное условие состояния устойчивого равновесия. Ясное дело, что в шар пакет превратиться не может, а вот в нечто круглое, похожее на цилиндр, может. Он и превращается! Даже донышко и верхняя грань пакета тоже становятся выпуклыми.

### Страшная сила атмосферного давления

Мы разобрались с тем, как небольшое избыточное (по сравнению с атмосферным) давление внутри пакета приводит к деформации пакета. А что будет, если давление внутри сосуда окажется меньше атмосферного? Наверное, многие проводили такой эксперимент с пустой пластиковой бутылкой из-под минеральной воды. Если сделать глубокий выдох, а потом вдохнуть ртом, приложив бутылку к губам, то на наших глазах бутылка сожмется – ее сдавит атмосферное давление. Затем мы можем заставить наши легкие действовать подобно вакуумному насосу. Для этого надо перекрыть горлышко бутылки

языком и глубоко выдохнуть через нос. Потом снова сделать глубокий вдох ртом – и цикл повторится. В результате такой дыхательной гимнастики большая бутылка сожмется весьма значительно.

А есть ли какая-то еще польза от этого, помимо того что мы демонстрируем наличие атмосферного давления и тренируем легкие?

Пожалуйста, ответ готов – теперь в обычный мешок для мусора мы можем уместить не один десяток ненужных пластиковых бутылок.

Кому-то из читателей такой эксперимент покажется недостаточно эстетичным. Можно ли как-то по-другому добиться того, чтобы давление в пластиковой бутылке оказалось меньше, иногда говорят – ниже, атмосферного? Здесь снова поможет... кипяток. Налейте в пластиковую бутылку кипяток, через 5–7 секунд плотно ее закройте и поставьте в холодильник. Зимой достаточно выставить бутылку на подоконник. Совсем скоро вы услышите характерное потрескивание – это сжимается бутылка. Вам ясно, почему давление внутри остывающей бутылки становится ниже атмосферного? Конечно же, при понижении температуры давление воздуха в бутылке уменьшается. На рисунке приведены фотографии двух бутылок объемом 1,5 литра, в которые было налито по 150 миллилитров кипятка.

Описанные здесь «детские» опыты демонстрируют явления, которые могут иметь весьма серьезные последствия. Как говорится, сказка ложь, да в ней намек, добрым молодцам урок!

Однажды одному из нас попалась на глаза фотография искореженной железнодорожной цистерны. Подумалось, что эта цистерна, вмещавшая раньше 60 тонн нефтепродуктов, а теперь годная только на металлолом, пострадала в серьезной аварии. Отнюдь. Есть такая специальная операция по очистке цистерн изнутри, называемая *пропаркой,* – она удаляет с внутренней поверхности цистерн осевшие нефть и мазут. В нарушение технологических условий наливной люк нашей цистерны после пропарки оказался наглухо закрытым. В результате остывающую цистерну сжало так, как будто на нее наступил великан.

Пожалуй, этой «страшной» историей наш рассказ можно и завершить. А ведь начиналось все с простой чашечки кофе...

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

***Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.ras.ru (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.***

***Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.***

**1.** На листе бумаги отмечены 4 точки. Петя измерил попарные расстояния между ними и получил числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в некотором порядке. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

*В.Произволов*

**2.** Два натуральных числа назовем близнецами, если у них одинаковое количество делителей и больше половины из них общие.

а) Приведите пример пары близнецов.

б) Докажите, что существует бесконечно много пар близнецов.

*Г.Жуков*

**3.** На шахматной доске неуязвимый слон преследует невидимого коня. Конь видит слона, а слон коня – нет. Конь не может сбить слона, даже если станет на одну с ним клетку. Фигуры ходят по очереди по шахматным правилам, начинает конь. Конь считается пойманным, если он попал на одну диагональ со слоном. Может ли слон действовать так, чтобы гарантированно поймать коня?

*Е.Епифанов*

**4.** Можно ли, используя по одному разу каждую из цифр: а) от 1 до 9; б) от 0 до 9, составить число с такими свойствами:

если вычеркнуть двойку, оно поделится на 2;

если вычеркнуть тройку, оно поделится на 3;

. . .

если вычеркнуть девятку, оно поделится на 9?

*И.Акулич*

**5.** В каждой клетке таблицы $7\times7$ стоит какая-то цифра (от 0 до 9). Известно, что в каждом квадратике $2\times2$ сумма цифр не больше 12. Какова наибольшая возможная сумма всех чисел в таблице?

*П.Кожевников*

## У нас в гостях журнал «Квантик»

# Молотый кофе

**А.БЕРДНИКОВ**

Как-то раз Леша и Антон собрались съездить на неделю на дачу. Антон обожал пить по утрам крепкий кофе и потому решил им основательно запастись. Но вот незадача: когда он вспомнил про свой любимый напиток, в его огромной сумке после всех сборов осталось совсем мало места. Как он ни пытался перекладывать вещи, ничего больше маленькой баночки в сумку не влезало. А полной баночки кофе хватало только на пять дней. Антон уже начал терять терпение, пытаясь решить возникшее затруднение. Молча наблюдавший за ним Леша не мог понять, что это Антон так прицепился к этим двум порциям: ну будет кофе чуть более или чуть менее крепким, какая разница-то? Но Антон был тот еще педант: подобные мелочи значили для него куда больше, чем для Леши.

Наконец, яростно сверля взглядом уже не так горячо любимый кофе, он заметил щели между отдельными гранулами. И тут его осенило!

– Придумал! – воскликнул он. – Сейчас я этот кофе помолю, в смысле, перемелю, короче, молотым сделаю! Тогда между гранулами пробелы станут меньше, и все как раз в банку влезет.

– Погоди-ка, – прервал его Леша. – Пробелы-то, конечно, уменьшатся, но их станет гораздо больше. Кто знает, больше тогда в банку поместится или меньше?

– Да, непонятно... Надо бы с этим разобраться прежде, чем все молоть, вдруг только хуже станет? Да и самим интересно додуматься.

*А как вы думаете, удастся таким способом сэкономить место или станет только хуже? А может быть, в обоих случаях кофе займет один и тот же объем?*

– Только я что-то не пойму, как к такой задаче подступиться. Там же кусков немерено, да все неправильной формы, – помрачнел Леша. – Да и как понять, как они в банке располагаются?

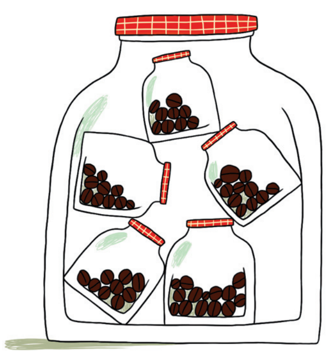
– Ну, это понимать вроде и не обязательно. Надо только разобраться, чем различаются эти два случая, а как конкретно устроен каждый из них – не важно.

– Чем они отличаются, говоришь? Да только размером крупиц. Наверное, можно считать, что крупицы просто, к примеру, в сто раз меньше стали по объему и их стало больше, соответственно, в сто раз. О, значит, если кофе перемолоть, будет то же самое, как если бы взяли сто твоих баночек кофе и ссыпали в кучу, а потом еще и в сто раз уменьшили.

– Ух ты! – подхватил Антон. – Значит, объем не изменится. Ведь если крупицы помолоть, а потом под увеличительным стеклом посмотреть – будет та же картина, словно и не мололи. Поэтому если банку мысленно в сто раз уменьшить по объему, получится как бы немного молотого кофе, только, понятно, и кофе, и пустого места в сто раз меньше станет. И если из ста таких банок потом исходную составить, в ней получится сколько и было и кофе, и пустого места, только кофе уже как будто молотый! Слушай, это же что получается – плотность, ну т.е. отношение массы к объему, у порошка не меняется! Хотя что это я радуюсь, что с кофе-то делать, все равно непонятно.

– Да, сколько его не мели, лучше не становится. Что же делать-то?

*Пока друзья думают, попробуйте найти какой-нибудь выход из этой ситуации. Подсказка: все же можно обойтись одним лишь измельчением, но догадаться до решения не так-то просто, так что не опускайте руки раньше времени!*



Подумав, Антон заявил:

– Нет, наверняка должен быть какой-то способ! Плотность порошка из-за щелей между крупицами явно меньше, чем у самого кофе. Надо как-то этим воспользоваться, избавиться от щелей...

– Точно! – осенило Лешу. – Если насыпать полную банку немолотого кофе, а не влезающий остаток хорошенько измельчить, то его можно будет засыпать в промежутки между крупными частичками! Ведь так?

– Вроде все выглядит правильно... Но как же так получается, что и крупный, и мелкий помолы не помещались (они имели одинаковую плотность), а их смесь влезла (она большей плотности, чем то, что смешивали)?

– Так если бы мы просто слой крупного кофе насыпали, а поверх него «положили» слой мелкого, ничего бы и не получилось. А мы еще после этого заставляем эти слои друг в друга проникать. Вот и получается, что в банку уже больше влезает.

– И вправду. Смотри, а я еще один способ понять все это придумал. Представь, что мы сначала полную банку мелким кофе засыплем. Влезет, как мы уже поняли, столько же, сколько и раньше. А теперь много областей размером с большую крупинку заменим этой самой крупинкой. Но она ведь сплошная, в ней-то щелей уже нет! Вот и получится в той же области больше масса.

– Да, это почти то же самое рассуждение, только «с точки зрения» уже мелкого кофе. А я вот еще что подумал. Сколько сам кофе, без промежутков, объема занимал? А какая, собственно, разница, пусть, к примеру, $\frac{3}{4}$. Тогда щели занимают $\frac{1}{4}$. Засыпав гораздо более мелкий помол, мы уже у этих щелей только $\frac{1}{4}$ незанятыми оставим. Значит, доля пустого места уже

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

– Ну да, щелей стало меньше, это-то мы и так выяснили.

– Ты дальше слушай. Если бы могли еще более мелко помолоть, можно было бы эту «кофейную пыль» снова засыпать в оставшиеся промежутки, и незанятым осталось бы лишь

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}.$$

Такую процедуру можно было бы проделывать сколько душе угодно, и свободного пространства останется

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\approx 0,$$

т.е. мы займем почти весь объем.

– Погоди, погоди! Это что же получается? – изумленно воскликнул Антон. – Если бы у нас были не крупинки кофе, а какие-нибудь раскоряки, тонкие такие, ветвящиеся, то понятно, что если их в кучу свалить, то свободное место в куче останется чуть ли не все. Обозначим его долю через $x$, это будет почти 1, но все-таки не все, т.е. $x < 1$. Тогда, беря меньшие копии этих коряг и засыпая в промежутки, получим, что сначала доля пустого места будет $x$, потом $x^2$, $x^3$ и так далее, чем дальше, тем меньше. Рано или поздно она станет меньше хотя бы $\frac{1}{10}$. Значит, мы почти все пространство заполнили этими корягами (правда, разного размера, ну и что?), которые, казалось, как ни складывай, плотно никак не уложишь! Прямо магия какая-то!

– Да, чудеса сплошные. Давай теперь это попробуем на практике применить!

Таким образом, кофе поместился-таки в банку в устраивающих Антона количествах, и сумка, наконец, была сложена. Но куда большее удовольствие друзья получили не от избавления от бытовой проблемы, а от той интересной и удивительной задачи, которую они решили. Надеюсь, вам она понравилась не меньше!

# Дробинка и парашют

А.СТАСЕНКО

*Как-то отличник ЕГЭ на вопрос профессора о скорости спуска парашютиста пожелал уточнить: «А сопротивление воздуха учитывать?»*

Однажды на вступительном экзамене в МФТИ

Сопротивление воздуха – это и есть спасительная сила (можно сказать, «сила небесная») для парашютиста: сила сопротивления $\vec{F}_c$ уравновешивает силу тяготения $m\vec{g}$, с которой Земля действует на парашютиста, а нужная площадь парашюта $S$ обеспечивает безопасное значение установившейся скорости $v_\infty$, с которой в конце концов состоится приземление. Это равновесие сил можно записать в виде

$$mg = F_c \sim \rho v_\infty^2 S \quad \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2\cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}\right]. \qquad (1)$$

Здесь $\rho$ – плотность воздуха, а в квадратных скобках показано, что правая часть имеет размерность силы (в ньютонах). Знак «$\sim$» напоминает о том, что формула размерностей позволяет получить результат только с точностью до безразмерного множителя, который аэродинамики называют коэффициентом сопротивления. А индекс «$\infty$» говорит о том, что нужно лететь очень долго, чтобы достичь предельной скорости, – это типичный релаксационный процесс, в котором приращение некой величины со временем пропорционально все уменьшающемуся ее отклонению от предельного значения.

Можно силу сопротивления пояснить еще и по-другому: на падающее тело с поперечным сечением $S$ [м$^2$] в единицу времени набегает масса воздуха $\rho v_\infty S\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right]$, а каждый килограмм этой массы приносит удельный импульс, равный $v_\infty\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$ (интересно – скорость можно понимать и как удельный импульс, т.е. импульс, отнесенный к единице массы). Итак,

$$mg = F_c \sim \rho v_\infty S \cdot v_\infty \qquad (2)$$

– в правой части стоит секундный поток импульса, т.е. сила.

Но при чем здесь дробинка и зачем ей сила сопротивления? Совершенно незачем. А воздух все-таки нужен – но не для торможения, а для охлаждения. Ведь идеальная дробь должна быть совершенным шаром – иначе при выстреле она будет сильно разлетаться в стороны. Чтобы сделать ее круглой, используют силу поверхностного натяжения, которая и придает расплавленной капельке свинца форму шарика. Для этого применяются специальные дроболитейные установки, обычно высотой до 45 м. (А в Балтиморской дробовой башне высота достигает даже 70 м – см. статью К.Богданова и А.Черноуцана «Чуть-чуть физики для настоящего охотника» в журнале «Квант» №1 за 1996 год.) В верхней части такой установки находится ванна для плавления свинца. Жидкий свинец попадает в литейный ковш с отверстиями, диаметр которых соответствует заказанному диаметру (калибру) дроби. Падающие с большой высоты капли свинца должны успеть отвердеть до того, как попадут в бак с водой и окончательно охладятся.

Тут уже пора оценить порядок величин, определяющих описанные процессы. Прежде всего, это размер дробинки. Дробь диаметром $2r = 5{,}5-10$ мм называется картечью, а при $1{,}25 \le 2r \le 2$ мм – бекасинником. Как видно, размеры дроби отличаются в восемь раз, а массы, следовательно, – в $8^3 = 512$ раз. Возьмем для оценок радиус $r = 1$ мм $= 10^{-3}$ м. Учитывая, что масса шара $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_c$, где $\rho_c$ – плотность свинца, а площадь его поперечного сечения $S = \pi r^2$, из формулы (1) получим оценку для установившейся скорости падения:

$$v_\infty \sim \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho} g r}$$

(заметим, что здесь мы, как честные физики, приняли $4/3 \sim 1$ – ведь речь идет о порядке величин). Подставив сюда плотность жидкого свинца $\rho_c = 10{,}7\cdot 10^3$ кг/м$^3$ и плотность воздуха $\rho \approx 1$ кг/м$^3$, для $r = 10^{-3}$ м получим $v_\infty \sim 10$ м/с. А если бы дробинка падала в вакууме (или если «пренебречь сопротивлением воздуха») с высоты $h = 50$ м, она достигла бы скорости

$$v_\infty^0 = \sqrt{2gh} \sim 30 \text{ м/с}.$$

Конечно, дробинке вовсе не обязательно достигать этой предельной скорости. Для нее важно другое – успеть отвердеть до падения в воду, потому что плотность воды $\rho_в$ на три порядка больше плотности воздуха $\rho$ и в воде дробинка может превратиться в лепешку.

Действительно, что позволяет капле жидкости сохранить форму шарика? Это сила поверхностного натяжения, которую разумно оценить как длину окружности $2\pi r$ [м], умноженную на коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$ [Н/м]. Ясно, что когда «восстанавливающая» сила оказывается порядка «сплющивающей» силы сопротивления, тут уже не приходится говорить о шаровой форме. Эту мысль можно выразить соотношением

$$\rho v_{max}^2 S \sim 2\pi r\sigma,$$

откуда

$$v_{max} \sim \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho r}}.$$

Подставляя сюда значения коэффициента поверхностного натяжения жидкого свинца $\sigma = 0{,}44$ Н/м и радиуса дробинки $r = 10^{-3}$ м, получим для ее движения в воде $v_{max} \sim \sim \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}44}{10^3\cdot 10^{-3}}}$ м/с $\sim 1$ м/с, а в воздухе $v_{max} \sim 30$ м/с. Сравнивая с полученной выше оценкой для установившейся скорости падения дробинки $v_\infty \sim 10$ м/с, видим, что деформацией дробинки в воздухе можно пренебречь, а вот в воде дробинка (если останется жидкой) может сильно сплющиться и развалиться.

Вспомним, что если «пренебречь сопротивлением воздуха», то последнее значение ($v_{max} \sim 30$ м/с) достигается при падении с высоты $h = v^2/(2g) \sim 50$ м. А при учете этого сопротивления – естественно, с меньшей высоты.

Итак, свинцовая капля должна непременно отвердеть до удара об охлаждающую и тормозящую воду. Но какая высота нужна для этого? И тут возникает необходимость описать довольно сложный процесс теплообмена нагретого шарика с прохладным окружающим газом – воздухом. Если этот шарик неподвижен относительно воздуха да еще находится в условиях невесомости (например, внутри спутника Земли), то единственным процессом теплообмена является *теплопроводность*. В условиях же тяготения даже вокруг неподвижного шарика возникает так называемая *свободная конвенция*: воздух, нагретый шариком, будет всплывать вверх под действием силы Архимеда (ведь плотность теплого воздуха меньше, чем холодного). Но когда (как в случае падающей дробинки) происходит обдув шарика набегающим на него потоком воздуха, включается еще и *вынужденная конвекция* – кто же не знает, что, быстро вынув палец из кипятка, хочется на него подуть (легко проверить, но лучше не надо). Однако вместо описания всех этих трех процессов вспомним великого Ньютона, который считал, что молекулы перед движущимся телом летят по прямым линиям до самого столкновения с его поверхностью, и получил почти правильное значение коэффициента сопротивления (коэффициента пропорциональности в формуле (2)) порядка $1/4$.

Следуя Ньютону, и мы для приближенных оценок обратимся к выражению (2). По-прежнему $\rho v S \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right]$ – это поток массы воздуха на площадь поперечного сечения $S$. Но теперь нас интересует не удельный импульс (т.е. скорость $v$), а разность удельных теплосодержаний воздуха в двух состояниях: при температурах жидкого свинца $T_\text{с}$ и окружающего воздуха $T$. Эта разность равна $c(T_\text{с}-T)\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right]$, где $c$ – удельная теплоемкость. Иначе говоря, обтекающий дробинку воздух должен уносить в секунду тепловую энергию $\rho v S c(T_\text{с}-T)\left[\frac{\text{Дж}}{\text{с}}\right]$. При этом вспомним, что в процессе отвердевания (как и при плавлении) температура тела $T_\text{с}$ остается постоянной, так что в этом выражении изменяется только скорость, а она есть $v=\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Поэтому умножив на $\Delta t$ и просуммировав (проинтегрировав) по всем элементарным моментам времени от начала ($t_0=0$) падения жидкой капли до ее полного отвердевания ($t$), мы получим изменение вертикальной координаты от $y=0$ до $y$. И в этот момент $t$ окончится «выкачивание» из капли всей запасенной в ней теплоты плавления $mL_\text{с}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_\text{с}L_\text{с}$, где $L_\text{с}\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right]$ – удельная теплота отвердевания (плавления) свинца.

Итак,

$$\rho S c(T_\text{с}-T)y \sim mL_\text{с},$$

откуда

$$y \sim \frac{L_\text{с}}{c(T_\text{с}-T)}\frac{\rho_\text{с}}{\rho}r. \qquad (3)$$

Подставив сюда температуру плавления свинца $T_\text{с}=327\ ^\circ\text{C}$, плотность жидкого свинца $\rho_\text{с}=10{,}7\cdot10^3\ \text{кг/м}^3$, удельную теплоту плавления свинца $L_\text{с}=2{,}3\cdot10^4\ \text{Дж/кг}$, удельную теплоемкость воздуха $c\sim10^3\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, температуру воздуха $T=20\ ^\circ\text{C}$ и его плотность $\rho\sim1\ \text{кг/м}^3$, получим $y\sim1\ \text{м}$.[1]

Что же можно заключить из наших оценок? Например, из выражения (3) видно, что в случае дроби диаметром 10 мм (картечь) для полного отвердевания нужна высота в пять раз большая. Поэтому вполне разумно, что на практике дроболитейные башни имеют высоту «до 45м» – с запасом на тот случай, если жидкий свинец в ванне вдруг будет перегрет (и, следовательно, при падении ему нужно будет еще охладиться до температуры $T_\text{с}$). И, кроме того, нужно помнить, что теория размерностей дает лишь характер зависимости между определяющими величинами с точностью до безразмерного множителя, который можно установить экспериментально или при помощи более глубоких размышлений.

[1] Интересно отметить, что в статье К.Богданова и А.Черноуцана, посвященной Балтиморской дробовой башне, получается, после более длинных и сложных рассуждений, зависимость $y\sim r^2$. Кто прав? Попробуйте разобраться. Ведь иногда более простые и грубые оценки оказываются ближе к истине... *(Прим.ред.)*

# Переменный ток и его характеристики

## *Б.МУКУШЕВ*

ПЕРЕМЕННЫМ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКОЙ ТОК, СИЛА ИЛИ НАправление которого (или то и другое вместе) периодически изменяется во времени. Характер изменения может быть самым разным. Например, таким, как показано на рисунке 1. Мы же ограничимся рассмотрением лишь такого переменного тока, сила которого изменяется по гармоническому, синусоидальному закону. И этому есть объяснение.

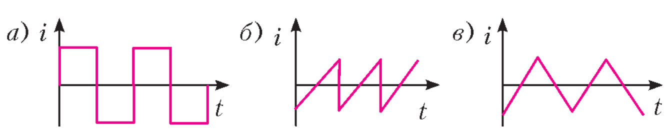


*Рис. 1*

Во-первых, практически все генераторы переменного тока вырабатывают электродвижущую силу, изменяющуюся по синусоидальному закону. А во-вторых, любое самое сложное колебание всегда можно представить в виде суммы синусоидальных, гармонических колебаний.

**Основные характеристики переменного тока.** Промышленный переменный ток представляет собой вынужденные электрические колебания с частотой $\nu = 50$ Гц, параметры – напряжение и сила тока – которых изменяются по гармоническим законам:

$$u(t)=U_m\sin\omega t,\ \ i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi).$$

Здесь $u(t)$ и $i(t)$ – мгновенные значения напряжения и силы тока в момент времени $t$, $U_m$ и $I_m$ – амплитудные значения напряжения и силы тока в цепи, $\omega=2\pi\nu$ – циклическая частота, $\varphi$ – разность (сдвиг) фаз между колебаниями силы тока и напряжения, которая зависит от характера сопротивления, включенного в цепь.

Первая характеристика переменного тока – *мгновенное значение*. Оно все время изменяется, колеблясь между нулем и максимальным значением. Если в цепь синусоидального переменного тока включено только активное сопротивление, то мы получим уравнения напряжения и силы тока в следу-

(Продолжение см. на с. 34)

# Чудеса в календаре

Числа окружают нас повсюду. На часах, на пульте телевизора, на упаковке любого товара и на многом-многом другом. Практически у каждого дома висит календарь. Мы так к нему привыкли, что не замечаем, как много в нем скрыто интересных и неожиданных фактов. Предлагаем нашим читателям взглянуть на календарь с «математическим уклоном».

## ВСЕ ДЕЛЯТСЯ НА 3

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

Убедитесь, что если какое-нибудь число в календаре делится на 3, то и все числа, расположенные вместе с этим числом на одной диагонали, идущей сверху вниз в левую сторону, также делятся на 3. А почему так получается?

## СУММЫ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

Убедитесь, что если сложить в любом столбце пять чисел подряд (если там имеется пять чисел, конечно), то полученная сумма обязательно будет делиться на 5. Например, сумма $2 + 9 + 16 + 23 + 30 = 80$ делится на 5. В чем причина этого факта?

А почему сумма четырех чисел подряд в одном столбце никогда не делится на 4? Что будет, если брать два или три числа подряд? А если считать суммы в строках или диагоналях?

## ЦИФРЫ НЕ ПОВТОРЯЮТСЯ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

Присмотритесь внимательнее к этой табличке. Вы можете проверить, что в любой строке, в любом столбце и на любой диагонали цифры единиц ни разу не повторяются (хотя цифры десятков повторяются многократно).

А в чем причина этого неожиданного факта? Будет ли он выполняться для любого другого месяца?

## ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| | | | | | | |

Рассмотрим два нечетных числа, которые расположены в соседних клетках по диагонали, которая идет слева направо и сверху вниз. Например, это могут быть числа 13 и 21 или 9 и 17.

Заметим, что эти числа взаимно простые.

• Докажите, что так будет для любой такой пары нечетных чисел в любом месяце.

• Докажите, что если даже неограниченно продолжить эту табличку вниз, то и тогда любые два аналогичных соседних (напомним, нечетных) числа будут взаимно простыми.

## БЕЗ ОБЩИХ ТОЧЕК

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |

Здесь выделены все клетки с простыми числами. Как видите, любая такая клетка имеет хотя бы одну общую точку с какой-то другой такой клеткой. А можно ли так переставить числа в этой табличке, чтобы никакие две клетки с простыми числами не имели бы между собой общих точек?

## ПЯТЬ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

В выделенном квадрате имеется пять нечетных чисел, из которых четыре числа простые, а одно (это число 21) составное. А может ли случиться так, что в квадрате того же размера (в каком-нибудь другом месяце) все пять нечетных чисел будут простыми?

## ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

Рассмотрим любые четыре клетки, центры которых являются вершинами какого-нибудь параллелограмма. Убедитесь, что суммы чисел, расположенных в противоположных углах параллелограмма, одинаковы.

Например:

$$5 + 21 = 8 + 18,\ 10 + 29 = 15 + 24.$$

А почему так будет получаться всегда?

## СУММЫ В КВАДРАТЕ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

А теперь рассмотрим в календаре любой квадрат, заполненный числами. Сложим числа по главным диагоналям. Например, в розовом квадрате $2 + 10 = 12$, $9 + 3 = 12$ – получили одно и то же число. В желтом квадрате $4 + 12 + 20 + 28 = 64$, $7 + 13 + 19 + 25 = 64$ – результаты снова совпали. Более того, если в квадрате нечетная длина стороны, то и по центральной горизонтали и по центральному столбцу суммы будут такими же. Случайно ли это?

## ЭТИ ЧИСЛА ЗАКРЫТЬ НЕЛЬЗЯ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

Объясните, почему все числа такой таблички нельзя закрыть десятью прямоугольниками $1 \times 3$.

## ВАСЯ ДВОЕЧКИН ОШИБАЕТСЯ

Ученик Вася Двоечкин сложил семь чисел по горизонтали и пять чисел по вертикали в какой-то табличке некоторого месяца. У него получились одинаковые суммы. Докажите, что Вася ошибся.

## ВАСЯ ДВОЕЧКИН СНОВА ОШИБАЕТСЯ

В другой раз ученик Вася Двоечкин сложил семь чисел по горизонтали и четыре числа по вертикали в какой-то табличке некоторого месяца. Он сложил только четыре числа, потому что в этом столбике больше чисел не было. У него, как и в прошлый раз, опять получились одинаковые суммы. Докажите, что и на этот раз Вася ошибся.

## ВСЕ СУММЫ НЕЧЕТНЫЕ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |

Вот так выглядела табличка в феврале некоторого года: в том году февраль начинался в понедельник и заканчивался в воскресенье.

Можно ли так переставить числа этой таблички, чтобы суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке были нечетными?

## ПЯТЬ КУСКОВ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | | | | | |

Разрежьте этот числовой многоугольник на пять равных многоугольников. Разрезать разрешается только по уже имеющимся на рисунке линиям.

## ФОКУС С КАЛЕНДАРЕМ

| ПН | ВТ | СР | ЧТ | ПТ | СБ | ВС |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | | |

Фокусник просит выбрать в календаре любой месяц. Затем просит выбрать в том месяце (который фокуснику не сообщают) столбик для любого дня недели. После этого фокусник просит назвать самое маленькое число и самое большое число в этом столбике. Через несколько секунд фокусник безошибочно называет сумму всех чисел этого столбика.

Например, выбран какой-то месяц, для которого календарик выглядит так, как на этой табличке. Допустим, после этого выбрана пятница. Фокуснику сообщают наименьшее и наибольшее числа соответствующего столбика. В нашем случае, это числа 3 и 31. Почти мгновенно фокусник утверждает, что сумма всех чисел этого столбика равна 85 (проверьте!).

В чем секрет этого фокуса?

*Л.Штейнгарц*

(Начало см. на с. 31)

ющем виде:

$$u(t) = U_m \sin \omega t\,,$$

$$i(t) = I_m \sin \omega t\,.$$

На рисунке 2 представлены соответствующие графики, здесь $T$ – период колебаний.

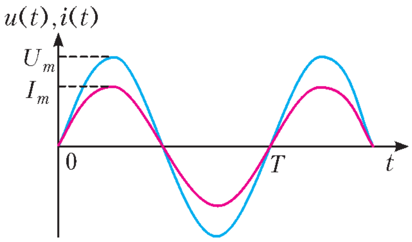


Рис. 2

Вторая из величин, характеризующих переменный ток, – его *амплитудное значение*. Оно равно максимальному мгновенному значению тока за период его изменения. Как ни странно, с точки зрения воздействия тока разной формы на различные нагрузки, амплитуда тока наименее информативна. Вот почему значение переменного тока определяют сравнением его действия с действием постоянного тока.

*Среднее значение* переменного тока – это значение такого постоянного тока, который переносит такой же заряд электричества за тот же промежуток времени, что и переменный ток. Для переменного тока, форма которого симметрична относительно оси времени, например для синусоидального сигнала, среднее значение тока равно нулю. Поэтому обычно под средним значением понимают средневыпрямленное, т.е. среднее значение тока после его выпрямления. Такое среднее значение тока характеризует его действие, например, при зарядке аккумулятора.

*Действующее, или эффективное, значение* переменного тока – это значение такого постоянного тока, который, проходя через активное сопротивление, скажем через резистор, выделяет за тот же промежуток времени такое же количество теплоты, какое выделит в этой нагрузке переменный ток. Именно эффективное значение тока важно применительно к нагревательным приборам.

**Среднее значение переменного тока и выпрямление синусоидального тока.** Переменный ток в течение периода имеет различные мгновенные значения. Естественно поставить вопрос: какое же значение тока (или напряжения) будет измеряться амперметром (или вольтметром), включенным в цепь? Если в цепь переменного тока включить прибор магнитоэлектрической системы, который предназначен для измерения среднего значения тока, то этот прибор зафиксирует нулевое значение. Действительно, в течение каждого периода ток полпериода протекает в одном направлении и полпериода – в другом. В цепи такого тока не будет происходить электролиз, и таким током нельзя заряжать аккумулятор.

Однако, когда говорят о среднем значении синусоидальной величины, обычно имеют в виду среднее значение за полпериода. На рисунке 3 изображена кривая изменения синусоидального переменного тока за полпериода. Построим прямоугольник с основанием $T/2$ и площадью, равной площади, заключенной между кривой графика и горизонтальной осью. Высота прямоугольника будет представлять среднее значение тока за полпериода. Известно, что площадь под синусоидой или под прямоугольником численно равна заряду, прошедшему через проводник:

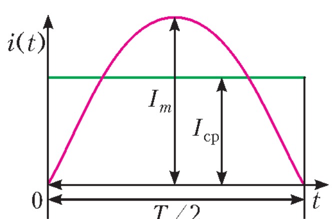


Рис. 3

$$q = \int_0^{T/2} i(t)\,dt = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{2}{\pi} I_m \frac{T}{2} = I_{ср} \frac{T}{2}\,.$$

Отсюда находим зависимость между средним и амплитудным значениями переменного синусоидального тока:

$$I_{ср} = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637 I_m\,.$$

Такая же зависимость существует между средним и амплитудным значениями напряжения:

$$U_{ср} = 0{,}637 U_m\,.$$

Для осуществления зарядки аккумулятора или для проведения электролиза синусоидальный ток выпрямляют. После выпрямления ток протекает в одном направлении, но его нельзя считать постоянным током. Токи, изменяющиеся только по величине, называют пульсирующими токами. Для получения постоянного тока этот пульсирующий ток сглаживают с помощью системы всевозможных фильтров. На рисунке 4,*а* приведены принципиальная схема однополупериодного выпрямителя переменного синусоидального тока и

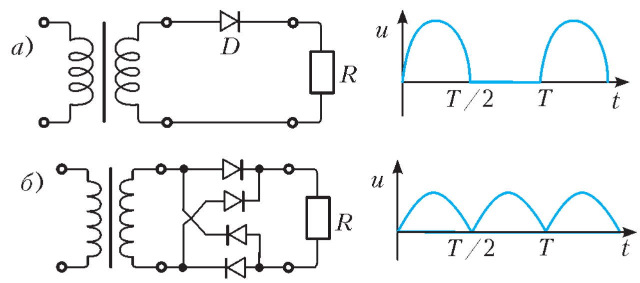


Рис. 4

график напряжения на выходе выпрямителя, а на рисунке 4,*б* представлены двухполупериодный выпрямитель (мостик) и форма полученного напряжения. Такие средние значения тока или напряжения уже можно измерить магнитоэлектрическим прибором, принцип действия которого основан на взаимодействии проводника с током и постоянного магнитного поля.

*Пример 1.* Имеются два выпрямителя: двухполупериодный и однополупериодный. К каждому из них поочередно подключают вначале аккумулятор и потом нагреватель. Как изменяются зарядный ток аккумулятора и ток в нагревателе при смене выпрямителя?

Зарядный ток – это средний ток в цепи. Поэтому при переходе от двухполупериодного выпрямления к однополупериодному зарядный ток аккумулятора уменьшается вдвое. Если же нагрузкой выпрямителя является нагреватель, то в таком случае вдвое уменьшается не ток, а мощность. Поскольку, как известно, мощность пропорциональна квадрату тока, то для однополупериодного выпрямления ток уменьшается не вдвое, а в $\sqrt{2}$ раз!

*Пример 2.* Каково среднее значение напряжения на выходе однополупериодного выпрямителя, представленного на рисунке 4,*а*? Амплитудное значение напряжения будем считать равным $U_m$.

Используя зависимость между средним и амплитудным значениями переменного синусоидального тока за полпериода, получим

$$U_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{1}{\pi} U_m = 0{,}318\ U_m\,.$$

**Действующее значение синусоидального переменного тока.** Как уже отмечалось, для характеристики переменного тока удобно использовать какое-нибудь его свойство, не зависящие от направления тока. Таким свойством является, например, способность тока нагревать проводник.

Известно, что частота промышленного синусоидального переменного тока равна $\omega = 314\ \text{с}^{-1}$ ($\nu = 50$ Гц). Значит, мгновенные значения напряжения и силы тока в цепи меняются достаточно быстро. При прохождении переменного тока по активному сопротивлению, например через лампочку, количество выделенной тепловой энергии также меняется со временем, но из-за инертности глаза мы не замечаем мигания лампочки. Таким образом, мгновенное значение мощности лампочки нам представляется постоянной величиной. Пропуская постоянный ток через эту лампочку, можно достичь того, чтобы при этом выделялось такое же количество теплоты, как и в случае переменного тока.

Мощность $P$ постоянного тока $I$, проходящего через сопротивление $R$, равна

$$P = I^2R .$$

Мгновенная мощность синусоидального переменного тока равна, соответственно,

$$p = i^2R = I_m^2R\sin^2\omega t = I_m^2R\frac{1-\cos 2\omega t}{2} = \frac{I_m^2R}{2} - \frac{I_m^2R}{2}\cos 2\omega t .$$

Среднее значение $\cos 2\omega t$ за период $T$ равно нулю ( что соответствует сумме площадей, помеченных на рисунке 5

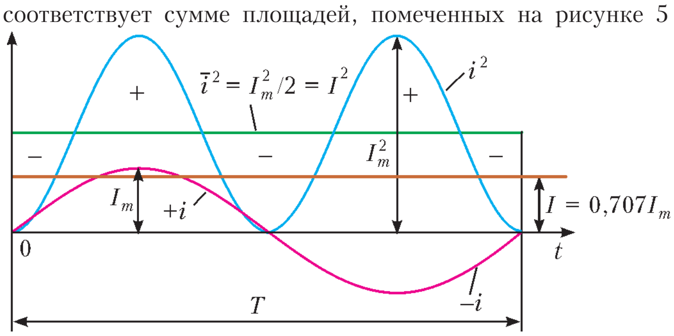



Рис. 5

знаками «+» и «−»). Тогда среднее за период значение квадрата силы синусоидального переменного тока равно

$$\overline{i^2} = \frac{I_m^2}{2} ,$$

а действующее значение тока составляет

$$I = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707I_m .$$

Аналогично, действующее значение переменного синусоидального напряжения равно

$$U = IR = \frac{I_m}{\sqrt{2}}R = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707U_m .$$

Электроизмерительные приборы, изготовленные по принципу магнитного взаимодействия двух последовательно подключенных токов (приборы электродинамической системы), а также тепловые амперметры и вольтметры, включенные в цепь переменного тока, показывают действующие значения тока или напряжения. Эти приборы универсальны, их используют для измерения величин и постоянного тока, и выпрямленных пульсирующих электрических сигналов.

Поскольку к категории переменного тока можно отнести не только синусоидальный ток, но и другие периодические электрические сигналы произвольной формы, то мы можем написать *обобщенные формулы* для расчета величин среднего и действующего значений переменного тока. Среднее значение переменного тока или напряжения равно среднему арифметическому всех мгновенных значений за период:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt, \quad U_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt .$$

Аналогично, средневыпрямленные значения тока и напряжения равны соответственно

$$I_{\text{ср выпр}} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|dt, \quad U_{\text{ср выпр}} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt .$$

Мгновенная мощность $p$ электрического сигнала есть произведение мгновенного напряжения $u$ на мгновенный ток $i$: $p = ui$. Чтобы найти среднюю мощность за период, необходимо просуммировать работы, совершаемые в бесконечно малые отрезки времени, а затем эту суммарную работу поделить на период $T$. При этом получится мощность, которая выделилась бы, если бы в каждый момент совершалась одна и та же работа. Работа за время $dt$ определяется выражением $uidt$, работа за период $T$ – выражением $\int_0^T uidt$, а средняя мощность – выражением

$$\overline{p} = \frac{A}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = R\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt .$$

Известно, что мощность $P$ постоянного тока $I$, проходящего через сопротивление $R$, равна $P = I^2R$. Если $P = \overline{p}$, т.е.

$$I^2R = R\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt ,$$

то действующее значение величины переменного тока (напряжения) определяется по следующей формуле:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \quad \left(U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}\right).$$

*Пример 3.* Что покажет электродинамический амперметр, включенный последовательно с резистором, если к нему подается пилообразное напряжение (рис.6)? Сопротивление резистора равно $R$.

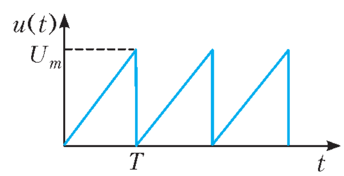



Рис. 6

Угол отклонения электродинамического амперметра прямо пропорционален квадрату мгновенного значения переменного тока. Таким образом, прибор покажет действующее значение тока в резисторе:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\frac{U_m^2T}{3}} = \frac{U_m}{R\sqrt{3}} .$$

*Пример 4.* Электролитическая ванна подключена последовательно с идеальным диодом и амперметрои к сети переменного синусоидального напряжения. Каково показание теплового амперметра, если известно, что за время $t = 1$ ч на катоде выделяется $m = 1{,}078$ г меди? Электрохимический эквивалент меди $k = 0{,}33 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл .

Согласно первому закону Фарадея,

$$q = \frac{m}{k} ,$$

где $q$ – заряд, прошедший через электролит за время $t$. На рисунке 7 показано изменение со временем тока в цепи с

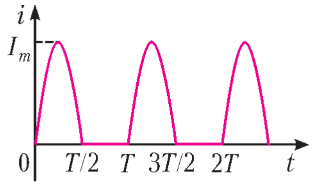



Рис. 7

идеальным диодом. Как видно из рисунка, $q = q_{T/2}\dfrac{t}{T}$, где $q_{T/2} = \int\limits_0^{T/2} I_m \sin\omega t \cdot dt = \dfrac{I_m}{\pi}T$ – заряд, проходящий по цепи за половину периода колебаний тока в сети. Таким образом,

$$q = \frac{I_m}{\pi}T\frac{t}{T} = \frac{I_m}{\pi}t.$$

Сравнивая два полученных выражения для заряда $q$, находим амплитудное значение тока в сети:

$$I_m = \frac{\pi m}{kt}.$$

Количество теплоты, выделившееся на амперметре сопротивлением $R$ за время $t$, равно

$$Q = Q_{T/2}\frac{t}{T} = \frac{I_m^2}{2}R\frac{T}{2}\frac{t}{T} = \frac{I_m^2}{4}Rt.$$

При установившемся тепловом равновесии средняя мощность, выделяющаяся на амперметре, равна

$$\bar{p} = \frac{Q}{t} = \frac{I_m^2}{4}R = I_A^2 R.$$

Отсюда находим показание амперметра:

$$I_A = \frac{I_m}{2} = \frac{\pi m}{2kt} \approx 1{,}43\text{ А}.$$

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

# Непрерывность в геометрии

А.БЛИНКОВ

При решении некоторых геометрических задач удобно использовать понятие непрерывности. Принято считать функцию $f(x)$ *непрерывной на некотором промежутке*, если в каждой точке этого промежутка при малых изменениях значения $x$ мало изменяется и значение функции.[1]

Чаще всего с помощью непрерывности доказываются утверждения о существовании. В этих случаях обычно применяется **теорема о промежуточном значении**: *если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1; x_2]$, $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется такое $x_0 \in [x_1; x_2]$, что $f(x_0) = C$.*

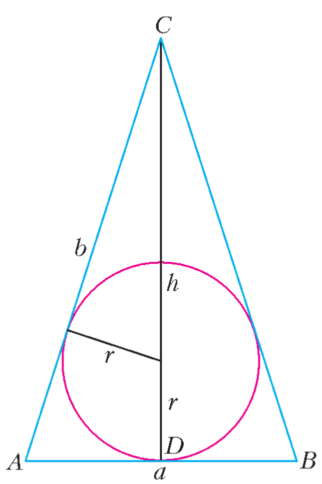



Рис. 1

**Задача 1**. *Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?*

**Ответ**: да, может.

**Решение**. Рассмотрим равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AB$, в который вписана окружность радиуса $r = 1$ (рис.1). Зафиксируем точку $D$ касания прямой $AB$ с окружностью и будем «двигать» вершину $C$ по высоте $CD$, изменяя ее расстояние $h$ от $AB$ так, чтобы данная окружность оставалась вписанной в равнобедренный треугольник $ABC$. Вершины $A$ и $B$ в этом случае будут смещаться вдоль прямой $AB$. При малых изменениях $h$ мало изменяется периметр треугольника, а так как $S_{\Delta ABC} = pr$ (где $p$ – полупериметр $ABC$), то мало изменяется и его площадь. Таким образом, зависимость $S(h)$ является непрерывной функцией.

Выберем значение $h$ так, чтобы треугольник $ABC$ был равносторонним, тогда его сторона $a = 2r\,\mathrm{tg}\,60° = 2\sqrt{3}$, а площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} < 6$. Так как $AB > 2$, то, выбрав какое-то значение $h$, большее шести (либо устремив $h$ к бесконечности), получим треугольник, у которого $S > 6$. По теореме о промежуточном значении найдется такое $h$, для которого $S = 6$, что и требовалось.

Таким образом, для решения задачи: 1) зафиксированы некоторые точки заданной конфигурации, выбрана независимая переменная $h$ и показано, каким образом изменяется положение остальных точек в зависимости от $h$; 2) объяснено, почему зависимость $S(h)$ искомой величины от выбранной переменной является непрерывной функцией; 3) показано существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого; 4) использована теорема о промежуточном значении.

Отметим, что другие способы решения, связанные с поиском параметров искомого треугольника в явном виде, так или иначе приводят к кубическому уравнению, которое невозможно решить «школьными» методами.

Здесь уместно привести еще одну задачу, связанную с рассмотренной конфигурацией. Для ее решения потребуется другое **свойство**: *функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значений.*

**Задача 2**. *У двух равнобедренных треугольников соответственно равны боковые стороны и радиусы вписанных окружностей. Обязательно ли эти треугольники равны?*

**Ответ**: нет, не обязательно.

**Решение**. Зафиксируем некоторую окружность радиуса $r$ и будем рассматривать равнобедренные треугольники $ABC$, описанные около этой окружности (см. рис.1). Такие треугольники однозначно определяются длиной $h$ высоты, опущенной на основание $AB$. Величина $h$ при этом может принимать любое значение из интервала $(2r; +\infty)$. Рассмотрим зависимость длины боковой стороны $b$ от $h$. При малых изменениях $h$ мало изменяется и значение $b$, поэтому $b(h)$ является непрерывной функцией.

[1] Более строго: $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x$ некоторого множества тогда и только тогда, когда для приращений функции в этих точках выполняется равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta f(x) = 0$.

Если $h$ стремится к границам выбранного интервала, то в обоих случаях $b$ стремится к «плюс бесконечности». Рассмотрим функцию $b(h)$ на отрезке $[h_1; h_2]$, где $h_1$ чуть больше, чем $2r$, а $h_2$ достаточно велико. Тогда значение функции $b(h)$ на концах отрезка будет достаточно большим. На этом отрезке функция достигает своих экстремальных значений, причем наибольшее достигается на одном из концов, а наименьшее – в какой-то внутренней точке $h_0$ (рис.2).

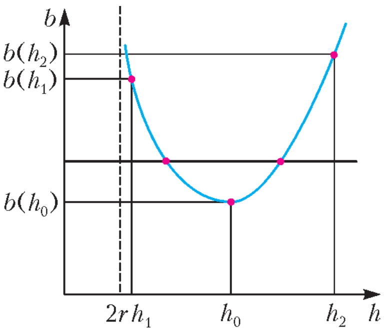


Рис. 2

Рассмотрим теперь какое-нибудь фиксированное значение функции, которое немного больше, чем $b(h_0)$. Оно достигается, по крайней мере, при двух различных значениях $h$. Следовательно, найдутся хотя бы два неравных равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами и равными радиусами вписанных окружностей.

Далее приведем примеры двух задач, в которых опять-таки используется теорема о промежуточном значении, но в отличие от задачи 1 сначала надо придумать конфигурацию, в которой эта теорема «заработает».

**Задача 3.** *Существует ли тетраэдр, у которого каждая грань является тупоугольным треугольником?*

**Ответ**: да, существует.

**Решение**. Рассмотрим трехгранный угол, у которого тупые плоские углы при вершине $A$ равны, например, по $110°$ (рис.3). Существование такого угла практически очевидно, но его можно доказать и строго (подсказка: см. задачу 2 для самостоятельного решения).

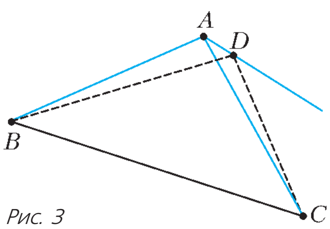


Рис. 3

Выберем точки $B$, $C$ и $D$ на сторонах этого угла на равных расстояниях от вершины $A$. В этом случае треугольник $BCD$ – равносторонний, т.е. $\angle BDC = 60°$. Зафиксируем теперь точки $B$ и $C$, после чего будем «двигать» точку $D$ по лучу, приближая ее к точке $A$. При малых изменениях длины $DA$ мало изменяется и величина угла $BDC$, значит, зависимость величины этого угла от $DA$ является непрерывной функцией. При этом если длина $DA$ близка к нулю, то величина угла $BDC$ близка к $110°$.

По теореме о промежуточном значении непрерывной функции найдется значение длины $DA$, при котором угол $BDC$ равен, например, $100°$. Таким образом, каждый из треугольников $ABC$, $ABD$, $ACD$ и $BCD$ будет тупоугольным.

Отметим, что существует и другое решение этой задачи, основанное на непрерывности. Читатель сможет найти его самостоятельно, если вспомнит, что такое точка Торричелли в треугольнике, у которого каждый угол меньше $120°$.

**Задача 4** (А.Толпыго, XXV Турнир городов). *Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна 2?*

**Ответ**: да, может.

**Решение**. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали перпендикулярны и диагональ $AC$ длины 1001 делит диагональ $BD$ длины 2 пополам (рис.4).

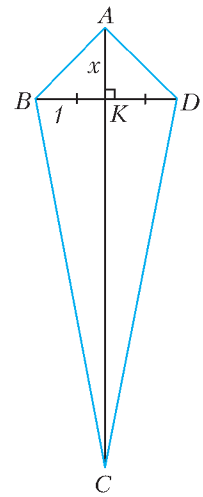


Рис. 4

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, в котором одна из диагоналей делится точкой пересечения пополам, называют *дельтоидом*.

Пусть диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$. Будем «двигать» точку $K$ по лучу $AC$ (т.е. перемещать диагональ $BD$ параллельно самой себе), изменяя расстояние $AK = x$. При малых изменениях $x$ периметр $P$ четырехугольника $ABCD$ также мало изменяется, поэтому зависимость $P(x)$ является непрерывной функцией.

При $x = 0$ точки $K$ и $A$ совпадут, четырехугольник $ABCD$ «вырождается» в треугольник $BCD$, периметр которого равен $2 + 2\sqrt{1001^2 + 1} > 2004$. При $x = \frac{1001}{2}$ точка $K$ становится серединой $AC$, тогда четырехугольник $ABCD$ – ромб, а его периметр равен $4\sqrt{\left(\frac{1001}{2}\right)^2 + 1} = 2\sqrt{1001^2 + 4} < 2004$. По теореме о промежуточном значении найдется положение точки $K$, для которого периметр $ABCD$ равен 2004, что и требовалось.

Из теоремы о промежуточном значении и сформулированного выше свойства функции, непрерывной на отрезке, следует, что *функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего* (**теорема о множестве значений**).

**Задача 5.** *В пространстве дан произвольный угол $A$. Докажите, что найдется такая плоскость $\Pi$, что проекцией угла $A$ на $\Pi$ является угол величины $\varphi$, где $\varphi$ принимает любое заранее заданное значение от $0°$ до $180°$.*

**Решение**. Пусть величина данного угла равна $\gamma$. Выберем сначала плоскость $\Pi$ таким образом, чтобы она была параллельна плоскости данного угла (рис.5,*а*). Тогда ортогональной проекцией угла $A$ на $\Pi$ является угол $A'$, равный углу $A$, т.е. угол величины $\gamma$. Проведем биссектрису угла $A$ и будем поворачивать данный угол вокруг прямой $m$, содержащей биссектрису. Рассмотрим зависимость величины $\varphi$ ортогональной проекции от угла поворота. При малых углах поворота величина ортогональной проекции изменяется мало, поэтому эта зависимость является непрерывной функцией.

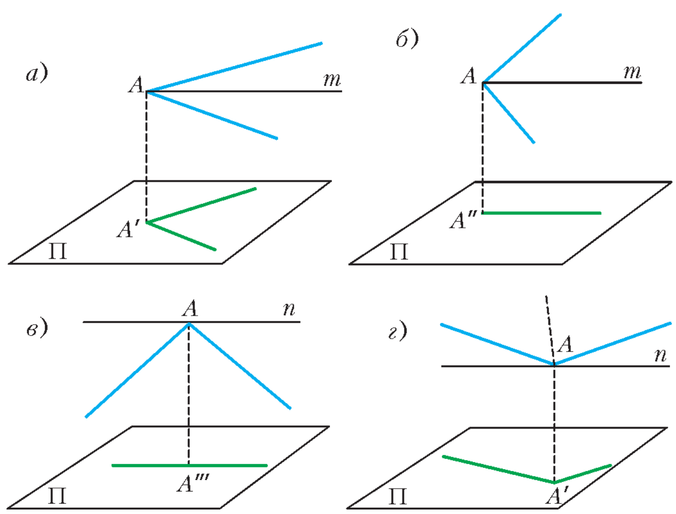


Рис. 5

При повороте на $90°$ получим угол, плоскость которого перпендикулярна $\Pi$ (рис.5,*б*). Его проекцией на плоскость $\Pi$ является угол $A''$ величиной $0°$. По теореме о множестве значений непрерывной функции $\varphi$ принимает любое значение от 0 до $\gamma$.

Выберем теперь плоскость $\Pi$ так, чтобы биссектриса угла $A$ пересекала $\Pi$ и была ей перпендикулярна (рис.5,*в*). Тогда ортогональной проекцией угла $A$ на $\Pi$ является угол $A'''$, равный $180°$. В плоскости данного угла через вершину $A$ проведем прямую $n$, перпендикулярную биссектрисе, и будем поворачивать данный угол вокруг прямой $n$. И в этом случае при малых углах поворота величина $\varphi$ ортогональной проекции изменяется мало, поэтому зависимость $\varphi$ от угла поворота является непрерывной функцией. При повороте на $90°$ получим угол $A'$, плоскость которого параллельна $\Pi$, значит, его проекцией является острый угол, равный данному, т.е. угол величины $\gamma$ (рис. 5,*г*). По теореме о множестве значений $\varphi$ принимает любое значение от $\gamma$ до $180°$.

Значит, $\varphi$ может принимать любое значение от $0°$ до $180°$.

**Задача 6** (И.Шарыгин). *Через точку $O$ пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена произвольная прямая, пересекающая стороны $AD$ и $BC$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Докажите, что длина отрезка $MK$ не превосходит наибольшей из диагоналей четырехугольника.*

**Решение**. Зафиксируем одно из возможных положений отрезка $MK$ и будем «двигать» точку $K$ по стороне $AD$. Тогда положение точки $M$ определяется однозначно (рис.6). Рассмотрим зависимость длины отрезка $MK$ от длины $AK = x$, где $x$ принимает все значения от 0 до длины $DA$ (включительно). При малых изменениях значения $x$ мало изменяется и длина $MK$, поэтому эта зависимость является непрерывной функцией. Значит, в какой-то точке отрезка $AD$ длина принимает свое наибольшее значение.

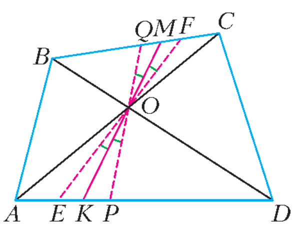


Рис. 6

Докажем, что это происходит на одном из концов отрезка. Действительно, пусть это не так, тогда между точками $A$ и $D$ найдется такое положение точки $K$, для которого длина $MK$ – наибольшая. Проведем через точку $O$ две прямые $EF$ и $PQ$ под равными малыми углами к прямой $KM$ так, чтобы точки $E$ и $P$ попали на сторону $AD$, а точки $F$ и $Q$ – на сторону $BC$ (а не на их продолжения).

Воспользуемся тем, что биссектриса треугольника не больше медианы, проведенной к той же стороне, а медиана меньше полусуммы сторон, между которыми она проведена (оба факта попробуйте доказать самостоятельно). Тогда $OK < \dfrac{OE + OP}{2}$ и $OM < \dfrac{OF + OQ}{2}$. Складывая эти неравенства почленно, получим, что $MK < \dfrac{EF + PQ}{2}$. Значит, один из отрезков $EF$ или $PQ$ длиннее, чем $MK$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, наибольшим значением рассматриваемой функции является длина одной из диагоналей четырехугольника, откуда и следует утверждение задачи.

Особо отметим: при решении этой задачи существенно используется тот факт, что наибольшее значение функции достигается!

В заключение рассмотрим «классическую» задачу, в которой сначала покажем стандартное применение непрерывности, а затем обсудим другой подход, позволяющий сделать некоторые обобщения.

**Задача 7.** *Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок зафиксированы, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.*

**Решение**. *Первый способ*. Заметим, что четырехугольник $ABCD$ однозначно определяется длиной любой из его диагоналей. Без ограничения общности можно считать, что $AB + BC \le CD + DA$. Обозначим через $\varphi$ сумму $\angle ABC + \angle ADC$. Рассмотрим такое положение четырехугольника, при котором вершина $B$ лежит на диагонали $AC$ (четырехугольник «вырождается» в треугольник $ACD$; рис. 7,*а*). В этом случае $\varphi > 180°$, а длина $AC = x$ – наибольшая. Будем постепенно уменьшать длину $AC$ (сохраняя выпуклость четырехугольника) до тех пор, пока не получим другое «вырожденное» положение $ABCD$: вершина $A$ или вершина $C$ окажется на диагонали $BD$ (в зависимости от того, какая из сумм меньше: $AB + AD$ или $CB + CD$). В этом положении $\varphi < 180°$ (рис. 7,*б*). При малых изменениях длины $AC$ сумма углов $ABC$ и $ADC$ также мало изменяется, поэтому зависимость $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Значит, существует такое положение данного четырехугольника, при котором $\varphi = 180°$, т.е. $ABCD$ – вписанный, что и требовалось.

Отметим, что множество шарнирных многоугольников включает в себя и многоугольники, ограниченные самопересекающейся замкнутой ломаной, но в данном случае мы их не рассматриваем.

*Второй способ*. Без ограничения общности можно считать, что $AB$ – наибольшая сторона данного четырехугольника. Рассмотрим окружность достаточно большого радиуса (точнее, $R > \dfrac{P_{ABCD}}{4}$), отметим на ней точку $A$ и последовательно отложим стороны четырехугольника в виде вписанной ломаной (рис.7,*в*). В этом случае ломаная не замкнется.

Далее, будем постепенно уменьшать радиус окружности, сближая точки $A$ и $A'$. Возможны два случая: 1) точки $A$ и $A'$ совпадут, т.е. ломаная замкнется, тогда полученный четырехугольник и будет искомым; 2) ломаная займет положение, при котором отрезок $AB$ станет диаметром окружности, но при этом еще не замкнется (рис.7,*г*). Тогда начнем постепенно увеличивать радиус окружности, зафиксировав на ней точку $B$ и опять-таки сближая точки $A$ и $A'$ до тех пор, пока ломаная не замкнется (точка $A$ в этом случае движется по той же полуокружности, на которой лежат остальные вершины ломаной).

При таком способе решения мы в неявном виде рассматриваем зависимость расстояния между точками $A$ и $A'$ по дуге от радиуса окружности и используем тот факт, что при малых изменениях радиуса положение каждой вершины ломаной меняется незначительно.

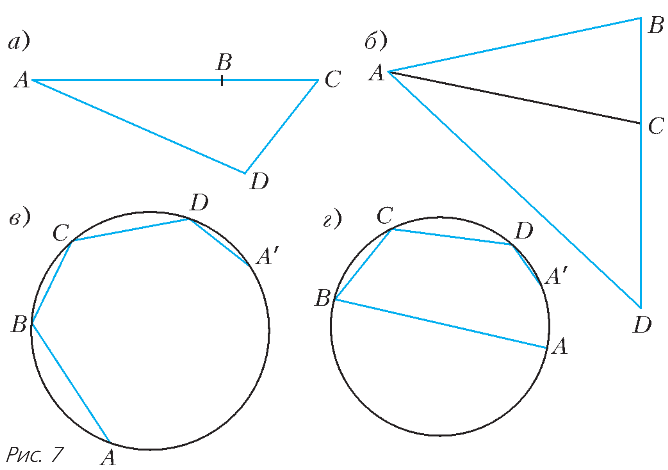


Рис. 7

Второй способ решения позволяет обобщить утверждение задачи на любой шарнирный многоугольник. Можно также доказать, что искомый многоугольник является единственным. Кроме того, среди всех шарнирных многоугольников с фиксированными сторонами (и порядком сторон) вписанный многоугольник имеет наибольшую площадь. Подробнее – см. книгу В.Ю.Протасова [8].

За рамками этой статьи намеренно оставлен разбор задач о разбиении плоских и пространственных фигур на равновеликие (см. задачи 22 – 24 для самостоятельного решения), так как подход к таким задачам хорошо проиллюстрирован в этюде Н.Н.Андреева «Задача о бутерброде» на сайте [11].

При решении других задач может также оказаться полезным следующее **обобщение теоремы о промежуточном значении**: *пусть имеются две непрерывные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *для которых существуют такие* $x_1$ *и* $x_2$, *что* $f(x_1) > g(x_1)$, *а* $f(x_2) < g(x_2)$; *тогда существует такое* $x_0 \in [x_1; x_2]$, *что* $f(x_0) = g(x_0)$.

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.** Докажите, что на высоте $AD$ равностороннего треугольника $ABC$ можно так выбрать точку $M$, что $\angle BMC = 100°$.

**2.** Докажите, что на высоте правильного тетраэдра существует точка, из которой каждое ребро основания видно под углом $90°$.

**3.** Докажите, что в круге с центром $O$ можно провести хорду $AB$ так, что площадь треугольника $AOB$ будет равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.

**4.** Даны концентрические окружности радиусов $R$ и $2R$. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней три равных отрезка.

**5.** В кубе $ABCDA'B'C'D'$ по ребрам $A'A$ и $CB$ из вершин $A'$ и $C$ соответственно одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки $X$ и $Y$. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние $XY$, если ребро куба равно 1.

**6.** Две полуокружности имеют общий диаметр $AB$ длины 2 и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки $A$ по одной из них и из точки $B$ по другой одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки $X$ и $Y$. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние $XY$.

**7** (олимпиада «Ломоносов», 2009 г.). Дан прямой двугранный угол. Можно ли провести плоскость так, чтобы она пересекла его грани по прямым, образующим угол $140°$?

**8.** Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Докажите, что у него существует четырехугольное сечение периметра 2,2.

**9.** Дан куб с ребром 1. Докажите, что у него существуют сечения: а) четырехугольное площади 1,4; б) треугольное площади 0,8; в) пятиугольное и шестиугольное площади 1,2.

**10.** Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны.

**11.** Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?

**12.** Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен $75°$?

**13.** Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = CD = 8$, $AC = BD = 10$, $BC = 12$, $AD = 13$?

**14*** (Е.Горская). Дан пространственный шарнирный четырехугольник $ABCD$ (длины его сторон и их порядок зафиксированы, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое его положение, при котором в тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах $AC$ и $BD$ прямые.

**15** (по мотивам задачи А.Акопяна, финальный тур VIII Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). Существует ли выпуклый четырехугольник и точка $P$ внутри него такие, что сумма расстояний от $P$ до вершин равна периметру четырехугольника?

**16** (А.Толпыго, XXV Турнир городов). Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна 1001?

**17** (по мотивам задачи Б.Френкина, заочный тур VII Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). Существует ли неравносторонний треугольник, в котором наименьшая медиана равна наибольшей высоте?

**18**. Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой высота равна расстоянию между серединами двух скрещивающихся ребер?

**19*** (А.Заславский, заочный тур VII Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

**20*** (М.Волчкевич, IV Устная олимпиада по геометрии). Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырехугольником?

**21*** (В.Сендеров, заочный тур I Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). В пространстве дан треугольник, наибольший угол $\varphi$ которого меньше $120°$. Докажите, что существует точка, из которой каждая сторона треугольника видна под углом $\varphi$.

**22.** Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру можно разбить на две равновеликие фигуры: а) прямой, параллельной заданной; б) прямой, проходящей через заданную точку.

**23*.** Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

**24*.** Верно ли, что: а) любую выпуклую плоскую фигуру можно разбить прямой так, чтобы площади и периметры получившихся фигур были равны; б) любое выпуклое тело можно разбить плоскостью так, чтобы объемы и площади поверхностей получившихся тел были равны?

**Список литературы и веб-ресурсов**


1. *А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик*. Геометрия для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1991.

2. *А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик*. Геометрия для 10–11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1992.

3. *М.И.Башмаков*. Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников. – М.: Дрофа, 2010.

4. Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина / Составители А.А.Заславский, В.Ю.Протасов, Д.И.Шарыгин. – М.: МЦНМО, 2007.

5. *Л.Э.Медников, А.В.Шаповалов*. Турнир городов: математика в задачах. – М.: МЦНМО, 2012.

6. Московские математические регаты / Составители А.Д.Блинков, Е.С.Горская, В.М.Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007.

7. *В.В.Прасолов*. Задачи по стереометрии. Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2010.

8. *В.Ю.Протасов*. Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

9. olympiads.mccme.ru/ustn – Устные геометрические олимпиады.

10. www.geometry.ru/olimp – Всероссийские олимпиады по геометрии имени И.Ф. Шарыгина

11. www.etudes.ru – Математические этюды.

12. www.problems.ru – База задач по математике.


*Автор выражает благодарность Н.Н.Андрееву, В.М.Гуровицу, А.А.Заславскому, П.А.Кожевникову и особенно В.Ю.Протасову за полезные обсуждения и ценные замечания.*

# Выбор периодичности, периодичность выбора...

*В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ*

*Увы, нельзя просто объяснить, что такое Матрица. Ты должен увидеть это сам. Еще не поздно отказаться. Потом пути назад уже не будет. Примешь синюю таблетку, и сказке конец, ты проснешься в своей постели и подумаешь, что тебе все приснилось. Примешь красную... и ты – в Зазеркалье. Я покажу тебе, как глубока эта кроличья нора. Запомни, я предлагаю тебе узнать правду. И не более.*
*Следуй за мной.*

Из фильма «Матрица»

## I

Макс собрался выключать компьютер, когда увидел мигающий маячок электронного сообщения от Софьи:

– Привет! Занят? Помоги решить пару задачек...

Макс познакомился с Софьей на каникулах. Они приехали на курсы языка в одну из европейских стран. Оказалось, что кроме языка они в своих школах посещали факультативы по математике. После месяца обучения языку ребята разъехались по своим странам, расположенным за тысячи километров друг от друга. Теперь же они поддерживали связь через интернет.

– Присылай, – ответил Макс.

Следующее сообщение от Софьи пришло с задачей.

**Задача 1.** *Существуют ли такие периодические функции* $g(x)$ *и* $h(x)$, *что* $g(x)+h(x)=x^2$?

Программы факультативов были разные, и иногда Софья присылала задачи по темам, которые еще не изучались на факультативе у Макса. Так получилось и на этот раз.

– Что за тема? – написал Макс. – Сбрось пару ссылок.

– Изучаем периодические функции, вот ссылки на статьи из «Кванта». [1]

Несмотря на трудности перевода, Макс переписал определение в тетрадь.

**Определение.** *Функция* $f(x)$, *определенная хотя бы в одной точке, называется периодической, если существует такое число* $T \neq 0$ *(называемое периодом), что для любого* $x$ *из области определения этой функции: а) числа* $x-T$ *и* $x+T$ *также принадлежат ее области определения; б)* $f(x+T)=f(x)$.

После внимательного прочтения определения решение первой задачи получилось само собой.

**Решение.** Если предположить, что такие функции существуют, то по условию имеем $g(x)+h(x)=x^2$. Пусть $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$ – периоды функций $g(x)$ и $h(x)$ соответственно. Из определения следовало, что для любого $x$ из области определения («Просто масло масленое, но из определения слова не выкинешь», – подумал Макс)

$$g(T_1+x)=g(x) \text{ и } h(T_2+x)=h(x).$$

Сделав три подстановки $x=0$, $x=T_1$, $x=T_2$, Макс получил

$$g(0)+h(0)=0,$$

$$T_1^2=g(T_1)+h(T_1)=g(0)+h(T_1),$$

$$T_2^2=g(T_2)+h(T_2)=g(T_2)+h(0).$$

Сделав еще подстановку $x=T_1+T_2$, он продолжил цепочку:

$$(T_1+T_2)^2=g(T_1+T_2)+h(T_1+T_2)=g(T_2)+h(T_1)=$$

$$=T_2^2-h(0)+T_1^2-g(0)=T_1^2+T_2^2.$$

Тогда $(T_1+T_2)^2=T_1^2+T_2^2$, следовательно, $2T_1T_2=0$. Но это невозможно. Значит, таких функций не существует, – подытожил Макс.

Задача не показалась Максу сложной.

Интересно, почему Софья прислала эту задачу? Она у нее не получилась или она ее прислала для разминки...

– Задачу решил. Какая следующая? – отправил сообщение Макс.

– Лови, – откликнулась Софья.

**Задача 2.** *Существуют ли такие периодические функции* $g(x)$ *и* $h(x)$, *что* $g(x)+h(x)=|x|$?

Макс попробовал поступить так же, как и в предыдущей задаче. Проделав аналогичные рассуждения и сделав те же подстановки, он получил равенство $|T_1+T_2|=|T_1|+|T_2|$. Равенство не выглядело противоречивым, по крайней мере для случая, когда оба периода были одного знака, в частности для $T_1>0$ и $T_2>0$.

«Ох уж этот модуль, всегда от него какие-то сюрпризы, – подумал Макс. – Придется дальше углубляться в тему». Ему не хотелось ударить в грязь лицом перед Софьей, хотя дословный перевод этого фразеологического оборота был ему не совсем понятен.

Макс еще раз пробежал глазами присланные статьи и обнаружил нужное свойство:

*«Если функция имеет хотя бы один период T, то она имеет бесконечно много периодов – ее периодом будет и всякое число nT, где n – отличное от нуля целое число».*

По этому свойству получается, что

$$g(x)=g(T_1+x)=g(nT_1+x).$$

Значит, если немного модифицировать предыдущее доказательство, то мы придем к равенству $|nT_1+T_2|=|nT_1|+|T_2|$, которое должно выполняться для любого целого $n$.

– Но это невозможно! – радостно воскликнул Макс.

**Упражнение 1.** Доведите до конца рассуждения Макса.

Макс отправил решения двух задач Софье и стал размышлять над первым ее сообщением. Почему после вопроса «Занят?» сразу же следовала просьба? Значит, Софья знала, что он не занят, или она думала, что он отбросит все дела, чтобы решить для нее пару задачек? Почему-то в этот момент он понял, что фраза «Помоги решить пару задачек» не означала решить ровно две задачи.

Его размышления прервал знакомый мигающий маячок электронного сообщения.

– Что так долго возился? Мне нужно решение в общем случае для многочлена ненулевой степени. Надеюсь, с кон-

---

[1] *Г.Дорофеев, Н.Розов.* Функции периодические и непериодические. – «Квант» №9 за 1987 год.

*А.Земляков, Б.Ивлев.* Периодические функции. – «Квант» №12 за 1976 год.

*А.Рывкин.* Периодические функции. – «Квант» №5 за 1973 год.

стантой и так все понятно. Если что придумаешь, присылай. Мне пора. Пока.

**Задача 3.** *Для каких многочленов*

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_r \neq 0,\ r \geq 1,$$

*существуют такие периодические функции* $g(x)$ *и* $h(x)$, *что* $g(x) + h(x) = f(x)$?

Макс попытался записать предыдущие рассуждения в общем виде.

Пусть $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$ – периоды функций $g(x)$ и $h(x)$ соответственно. Если $T \neq 0$ – период функции, то и $-T \neq 0$ – также период функции, поэтому, не теряя общности, можно считать, что $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Имеем для любых целых $n$, $k$

$$g(x) = g(T_1 + x) = g(nT_1 + x),\ h(x) = h(T_2 + x) = h(kT_2 + x).$$

Сделав три подстановки $x = 0$, $x = nT_1$, $x = kT_2$, получим

$$g(0) + h(0) = f(0),$$

$$f(nT_1) = g(nT_1) + h(nT_1) = g(0) + h(nT_1),$$

$$f(kT_2) = g(kT_2) + h(kT_2) = g(kT_2) + h(0).$$

Сделав подстановку $x = nT_1 + kT_2$, продолжим цепочку:

$$f(nT_1 + kT_2) = g(nT_1 + kT_2) + h(nT_1 + kT_2) = g(kT_2) + h(nT_1) =$$
$$= f(kT_2) - h(0) + f(nT_1) - g(0) = f(nT_1) + f(kT_2) - f(0).$$

Значит, для любых целых $n$, $k$

$$f(nT_1 + kT_2) - f(nT_1) - f(kT_2) + f(0) = 0. \qquad (*)$$

В частности, можно взять $n = k$, тогда

$$f(nT_1 + nT_2) - f(nT_1) - f(nT_2) + f(0) = 0.$$

Левую часть равенства можно рассматривать как многочлен степени не выше $r$ от переменной $n$. С другой стороны, равенство выполняется для всех целых $n$. Это возможно только в случае, когда все коэффициенты многочлена от переменной $n$ тождественно равны 0.

В частности, коэффициент при старшей степени многочлена также равняется нулю. Этот коэффициент можно вычислить, он равен $a_r\left((T_1 + T_2)^r - T_1^r - T_2^r\right)$. Чтобы раскрыть внутренние скобки, применим бином Ньютона. Если $r \geq 2$, то $T_1^r$ и $T_2^r$ взаимно уничтожатся и останется сумма положительных слагаемых. Следовательно, если $r \geq 2$, то такого разложения не существует. Получается, что это выражение тождественно равно нулю только при $r = 1$.

Итак, осталось рассмотреть случай $r = 1$, т.е. когда многочлен является линейной функцией $f(x) = a_1 x + a_0$.

Казалось, что задача упростилась и до окончательного ее решения рукой подать. Но найти решение в этом простом случае Максу не удавалось. Утро вечера мудренее – вспомнил он русскую поговорку. Отправив Софье свои рассуждения, Макс выключил компьютер.

## II

Выпив утренний кофе, Софья начала просматривать выкладки Макса.

Часть доказательства Макса поддавалась упрощению. Софья переписала на листок бумаги равенство $(*)$ для $k = 1$:

$$f(nT_1 + T_2) - f(nT_1) - f(T_2) + f(0) = 0.$$

Следовательно, функция $F(x) = f(x + T_2) - f(x) - f(T_2) + f(0)$ обращается в ноль бесконечное число раз. Если $f(x)$ – многочлен степени $r$, то $F(x)$ – многочлен степени $r - 1$, – рассуждала Софья. Поэтому, если $r - 1 > 0$, то $F(x)$ обращается в ноль конечное число раз или ни разу, поскольку у многочлена имеется только конечное число корней или ни одного. Получаем противоречие. Значит, $r \leq 1$.

«В принципе мы можем применить это рассуждение для случая, когда $f(x)$ – рациональная функция или какая-нибудь другая, например тот же модуль, – подумала Софья. – Ой… нет, для модуля не подойдет, для него $F(x)$ тоже будет обращаться в ноль бесконечное число раз. Ох уж этот модуль, хорошо, что Макс нашел для него решение».

Остался случай линейной функции. Почему-то Макс не прислал решение для этого случая. Взглянув еще раз на все выкладки, она заметила, что к противоречиям приводило все то же соотношение $(*)$. Для рассматриваемых функций находились такие целые $n$, $k$, что равенство $(*)$ не выполнялось. В случае линейной функции $f(x) = a_1 x + a_0$ она записала

$$f(nT_1 + kT_2) - f(nT_1) - f(kT_2) + f(0) =$$
$$= a_1(nT_1 + kT_2) + a_0 - a_1 nT_1 - a_0 - a_1 kT_2 - a_0 + a_1 \cdot 0 + a_0 \equiv 0.$$

Значит, в случае линейной функции равенство $(*)$ выполняется для всех целых $n$, $k$.

А вдруг в этом случае существуют такие периодические функции $g(x)$ и $h(x)$, что $g(x) + h(x) = a_1 x + a_0$?

«Может, удастся избавиться от параметров», – подумала Софья. Если у нас есть разложение в сумму двух периодических функций для $f(x) = x$, т.е. $x = g(x) + h(x)$, то тогда мы легко построим разложение в сумму двух периодических функций для $f(x) = a_1 x + a_0$. Например, в качестве первого слагаемого мы можем взять периодическую функцию $a_1 g(x) + a_0$, а в качестве второго $a_1 h(x)$.

Мы знаем, что у константы периодом является любое число, а поскольку $x = g(x) + h(x) = (g(x) + c) + (h(x) - c)$, то наше разложение мы можем искать с точностью до константы. В частности, мы можем искать функции $g(x)$ и $h(x)$ такие, что $g(0) = 0$ и $h(0) = 0$.

Тогда для таких функций выполняется

$$0 = g(0) = g(T_1) = g(nT_1), \qquad 0 = h(0) = h(T_2) = h(kT_2).$$

Получаем $0 \neq nT_1 = g(nT_1) + h(nT_1) = h(nT_1)$. Значит, $nT_1 \neq kT_2$ ни при каких ненулевых целых $n$ и $k$. Поэтому разложение $x = g(x) + h(x)$ возможно только тогда, когда периоды $T_1$ и $T_2$ несоизмеримы, – заключила Софья.

Для примера положим $T_1 = 1$ и $T_2 = \sqrt{2}$. Тогда $g(n) = 0$, $h(n) = n$, $g(k\sqrt{2}) = k\sqrt{2}$, $h(k\sqrt{2}) = 0$, $g(n + k\sqrt{2}) = k\sqrt{2}$, $h(n + k\sqrt{2}) = n$ для любых целых $n$, $k$.

Явного противоречия пока нет. Какие-то странные функции получаются. Какой у них может быть график? Мы определили наши функции $g(x)$ и $h(x)$ на всех числах вида $n + k\sqrt{2}$. А как быть с остальными числами? Столько вопросов! Не спросить ли об этом у Макса?

## III

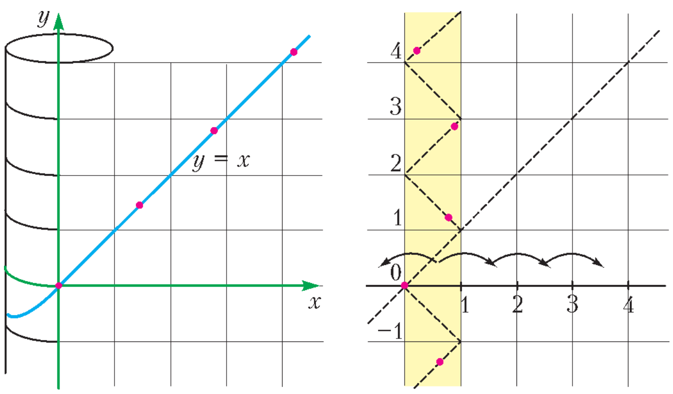
Макс с интересом посмотрел выкладки Софьи, и его мнение о существовании разложения $x = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ периодические функции, укрепилось.

В определении периодической функции не требовалось, чтобы функция была задана на всей оси, достаточно было, «чтобы для любого $x$ из области определения числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежали ее области определения». Вдруг Максу пришла в голову идея: а что если для начала попытаться представить эти функции и их графики не на всей действительной прямой, а на множестве чисел, представимых в виде $n + k\sqrt{2}$ ($n$, $k$ – целые)? При этом временно можно считать, что в остальных точках действительной прямой эти функции не определены, а когда появится ясность, то попытаться доопределить функции и в оставшихся точках.

Мысленно Макс представил себе плоскость в виде прозрачной полиэтиленовой пленки толщины ноль с нанесенными на нее осями координат. Все точки с координатами $\left(n\sqrt{2};\,k\sqrt{2}\right)$ были отмечены красной краской. Намотаем теперь пленку на барабан с длиной окружности 1, – подумал Макс.

Для надежности проклеим слои пленки бесцветным клеем. Разрежем теперь то, что получилось, вдоль оси $y$ и развернем в полосу ширины 1 (см. рисунок). Красных точек в пределах этой полосы будет бесконечно много, но при этом никакие две из них не будут располагаться на одной вертикальной прямой. Красные точки будут точками графика функции $y = g(x)$ на отрезке $[0;1]$. Чтобы получить периодическую функцию, будем копировать эту полосу и сдвигать вправо или влево на расстояния, равные целым числам.

Для построения части графика функции $y = h(x)$ на отрезке $\left[0;\sqrt{2}\right]$ можно поступить аналогично. Все точки с координатами $(n;n)$ отметим синей краской. Намотаем теперь эту пленку на барабан с длиной окружности $\sqrt{2}$. Разрежем




то, что получилось, вдоль оси $y$ и развернем в полосу ширины $\sqrt{2}$. Копиями полосы заполним всю плоскость.

Перенесем все синие точки графика $y = g(x)$ (в том числе и точки, полученные копированием) на новую прозрачную пленку. Точно так же на другую новую прозрачную пленку перенесем красные точки графика $y = h(x)$. А теперь склеим полученные две пленки так, чтобы оси координат совпадали. Что мы увидим?

В начале координат совпадут одна красная и одна синяя точки. На вертикальных прямых будут располагаться:

- для абсцисс вида $n\sqrt{2}$, $n \neq 0$ – одна красная точка с координатами $(n\sqrt{2};n\sqrt{2})$ и одна синяя точка с координатами $(n\sqrt{2};0)$;
- для целочисленных абсцисс вида $n$, $n \neq 0$ – одна красная точка с координатами $(n;0)$ и одна синяя точка с координатами $(n;n)$;
- для абсцисс вида $n + k\sqrt{2}$, где $n \neq 0$, $k \neq 0$, – одна красная точка с координатами $(n + k\sqrt{2};k\sqrt{2})$ и одна синяя точка с координатами $(n + k\sqrt{2};n)$.

На остальных вертикальных прямых ни синих, ни красных точек не будет.

Таким образом, мы видим, что в графике, являющемся суммой графиков функций $g(x)$ и $h(x)$, все точки будут располагаться на прямой $y = x$.

Функции получились действительно странными. Глядя на рисунок, Макс понял, что получились периодические функции, не ограниченные на любом, даже сколь угодно малом, интервале. Интересный пример, может, Софье что-то подобное встречалось.

## IV

Не успела Софья подумать, куда пропал этот Макс, как увидела сообщение.

– Привет! Знаешь ответ?

**Задача 4.** *Существует ли периодическая функция, определенная на всей числовой прямой, которая не ограничена на любом интервале?*

– Hello! Yes, I know! – также в рифму ответила ему Софья. – Такая функция не может быть непрерывной. И я смогу ее построить по принципу функции Дирихле. [2]

Определим нашу функцию следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ – не рациональное, т.е. } x \notin \mathbb{Q}; \\ 1, \text{ если } x = 0; \\ n, \text{ если } x = \pm m/n,\ n, m \in \mathbb{N};\quad \text{НОД}(m;n) = 1. \end{cases}$$

Другими словами, во всех иррациональных точках функция равна нулю, а во всех рациональных принимает значение, равное минимальному знаменателю аргумента.

Очевидно, что получилась периодическая функция с периодом 1. Если взять любой интервал в промежутке $[0;1]$, то в нем найдутся две рациональные точки $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Софья вспомнила недавнее занятие математического кружка и статью[3] из «Кванта» по рядам Фарея. Теперь мы можем рассмотреть медианту этих дробей $\frac{a+c}{b+d}$. Тогда $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Берем одну из крайних дробей и медианту и снова строим медианту этих дробей и так далее. Мы получаем бесконечную последовательность рациональных чисел внутри интервала. Знаменатели последовательности будут неограниченно возрастать, следовательно, на этом интервале наша функция будет неограниченной сверху. В силу периодичности функция будет неограниченной сверху на любом интервале действительной оси.

Конечно, это пример функции, не ограниченной сверху, снизу наша функция ограничена. Но ее легко подкорректировать (переопределить) так, чтобы получить периодическую функцию, не ограниченную на любом интервале.

– Что за манера отвечать вопросом на вопрос, – написала Софья. – Направляю тебе пример периодической функции, не ограниченной на любом интервале. Разобрался с линейной функцией или нет?

– Пока нет, но посмотри мои рассуждения про пленку.

– О! Да ты – барабанщик-экспериментатор ))). По-моему, тебе не удастся одновременно намотать на барабан правую и левую полуплоскости!

– Тут ты права. Вначале разрежем пленку по оси $y$. Затем намотаем правую полуплоскость, потом левую полуплоскость, а в остальном – как написано…

– Хорошо. Вернемся к построению. Возьмем какую-нибудь новую точку, где мы не определили наши функции, например $\sqrt{3}$. Надеюсь, понятно, что $\sqrt{3}$ не представляется в виде $n + k\sqrt{2}$. Как будешь доопределять функции?

– Очень просто! Вот так:

$$g\left(\sqrt{3}\right) = 0,\ h\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3},\ g\left(\sqrt{3} + n + k\sqrt{2}\right) = k\sqrt{2},$$

$$h\left(\sqrt{3} + n + k\sqrt{2}\right) = \sqrt{3} + n.$$

В принципе я могу взять еще одну точку, сделать аналогичное построение, затем еще одну точку и так далее. Но не приду ли я к противоречию?

---

[2] Функция Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}; \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

[3] *В.Вагутен.* Близкие дроби. – «Квант» №8 за 1975 г.

– Я поняла, о чем ты говоришь. Знаешь, как в песне поется: «Мы выбираем, нас выбирают. Как это часто не совпадает...»[4]

– Ну, при чем тут проблема выбора.

– Почти угадал, только я намекала на аксиому выбора. Вот читай.

**Аксиома выбора.**[5] *Для любого семейства* $\Phi$ *непустых множеств* $X$ *существует функция выбора, ставящая в соответствие каждому* $X \in \Phi$ *элемент из* $X$.

– Да это же очевидно. Или нет?

– Аксиомы и должны быть очевидными, ведь так? :-) Только аксиома выбора не так проста, как кажется. Ведь семейство множеств $\Phi$ не обязательно конечное или даже счетное. Аксиому сформулировал в начале прошлого века немецкий математик Цермело, и ее иногда называют аксиомой Цермело.

– Я уже заглянул в Википедию. Оказывается, вокруг этой аксиомы был серьезный спор. Некоторые известные математики не принимали аксиому выбора. Они опасались, что ее применение может привести к противоречиям. В итоге из-за одной этой аксиомы придумали целую систему аксиом...

– Вот-вот. Ты пока еще поразбирайся с аксиомой выбора, а мне кажется, что я нашла строгое решение для линейной функции. Жди...

Софья села записывать решение.

**Решение Софьи.** Рассмотрим несоизмеримые $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$, т.е. такие, что $T_1/T_2$ – иррациональное число. Введем отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$. Будем говорить, что $x$ эквивалентно $y$, и записывать $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует пара целых чисел $\{n;k\}$ такая, что $x - y = nT_1 + kT_2$.

**Упражнение 2.** Докажите, что при таком определении мы действительно получаем отношение эквивалентности, т.е. что выполнены такие свойства:

1) $x \sim x$ для любого $x \in \mathbb{R}$;
2) если $x \sim y$, то $y \sim x$;
3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

В частности, $x \sim x + T_1$ и $x \sim x + T_2$.

Отметим, что для эквивалентных $x$ и $y$ соответствующая пара $\{n;k\}$ определена однозначно. В противном случае $T_1/T_2$ будет рациональным.

По аксиоме выбора можно выбрать в каждом классе эквивалентности $U$ элемент $u \in U$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ существует выбранный нами элемент, обозначим его $u_x$, такой, что $x \sim u_x$. Следовательно, существует только одна пара $\{n;k\}$ такая, что $x - u_x = n \cdot T_1 + k \cdot T_2$.

Определим функции $g$ и $h$ следующим образом: $g(x) = k \cdot T_2$ и $h(x) = n \cdot T_1 + u_x$. По построению $g(x + T_1) = g(x) = k \cdot T_2$ и $h(x + T_2) = h(x) = n \cdot T_1 + u_x$, откуда функции $g(x)$ и $h(x)$ – периодические с периодами $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$. Кроме того,

$$f(x) = x = u_x + nT_1 + kT_2 = g(x) + h(x).$$

Таким образом, мы построили периодические функции $g(x)$ и $h(x)$, сумма которых равна линейной функции $f(x) = x$. Что и требовалось.

## V

Глядя на решение Софьи, Макс вдруг вспомнил, где еще ему встречалась аксиома выбора. Это было занятие кружка по функциональным уравнениям. Тогда они рассматривали функциональное уравнение Коши $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых действительных $x$, $y$. В качестве решения уравнения там получалась линейная функция, но вскользь упоминались и какие-то другие, разрывные функции.

Чтобы освежить память, Макс засел в поисковик и нашел очередную статью[6] из «Кванта». Кроме того, поисковик выдал еще и книжку по функциональным уравнениям.[7]

Из найденных источников Макс узнал, что любую функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению Коши, называют аддитивной функцией.

Макс еще раз посмотрел на соотношение $(*)$. Из рассуждений Софьи следовало, что функцию можно было искать с точностью до константы, т.е. считать, что $f(0) = 0$. Теперь соотношение $(*)$ можно было переписать в виде

$$f(nT_1 + kT_2) - f(nT_1) - f(kT_2) = 0.$$

Если обозначить $x = nT_1$ и $y = kT_2$, то получалось в точности функциональное уравнение Коши $f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$. Следовательно, рассудил Макс, равенство $(*)$ выполняется для любой аддитивной функции.

Вдруг Макса осенило: а если разложение $f(x) = x = g(x) + h(x)$ искать в классе аддитивных функций? Макс прочел, что такие функции строят с помощью базиса Га́меля.

За этот небольшой период времени тетрадка Макса была уже наполовину исписана. С чистого листа, как и прежде, он записал найденное определение.

**Определение.** *Базис Гамеля* $\mathbb{R}$ *над* $\mathbb{Q}$ *– это множество действительных чисел* $\{e_\alpha\}$ *(индекс* $\alpha$ *пробегает некоторое несчетное множество* $\mathrm{A}$*, т.е.* $\alpha \in \mathrm{A}$*) таких, что*

*– любое действительное число может быть представлено в виде некоторой линейной комбинации всех элементов базиса* $\{e_\alpha\}$ *с рациональными коэффициентами, где лишь конечное число коэффициентов отличны от нуля (полнота базиса);*

*– такое представление для любого действительного числа единственно.*

Другими словами, для любого ненулевого действительного числа $u \in \mathbb{R}$ существует только один такой конечный набор ненулевых рациональных чисел $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots, r_{\alpha_i}$, что выполняется равенство

$$u = r_{\alpha_1} e_{\alpha_1} + r_{\alpha_2} e_{\alpha_2} + \ldots + r_{\alpha_i} e_{\alpha_i}.$$

Макс прочел, что таких базисов много и все они состоят из бесконечного, а точнее из несчетного, числа элементов.

«Странный базис, – подумал Макс. – Конструктивно базис Гамеля построить нельзя, но можно доказать его существование при помощи аксиомы выбора. А раз такой базис существует, то, определив наши функции на элементах базиса, мы определим наши функции на всей числовой прямой. Убойная логика, и все же в голове не укладывается. Однако попробую записать».

**Решение Макса.** Возьмем несоизмеримые числа $T_1$ и $T_2$. Рассмотрим базис Гамеля $e_1 = T_1$, $e_2 = T_2$, $\ldots, e_\alpha, \ldots$ (Макс посчитал, что существует базис Гамеля, у которого первые два элемента $T_1$ и $T_2$. Он не ошибся, хотя доказательство этого факта выходит за рамки статьи.)

Определим значения наших функций на элементах базиса: $g(e_1) = g(T_1) = g(0) = 0$, $g(e_2) = g(T_2) = T_2$, $h(e_1) = h(T_1) = T_1$, $h(e_2) = h(T_2) = h(0) = 0$. На всех остальных элементах базиса положим $g(e_\alpha) = 0$, $h(e_\alpha) = e_\alpha$. Согласно построению имеем $g(e_1) + h(e_1) = e_1 = T_1$, $g(e_2) + h(e_2) = e_2 = T_2$,

---

[4] «Черное и белое», песня из кинофильма «Большая перемена», слова М.Танича, музыка Э.Колмановского.

[5] *И.Ященко*. Парадоксы теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.

[6] *А.Лопшиц*. Функциональные уравнения. – «Квант» №1 за 1975 год.

[7] *Я.С.Бродский, А.К.Слипенко*, Функциональные уравнения. – Киев: Вища школа, 1983.

$g(e_\alpha)+h(e_\alpha)=e_\alpha$ при $\alpha \neq 1;2$. По свойству аддитивности функции будут определены на всей числовой прямой:

$$g(r_1e_1+r_2e_2+\ldots)=r_1g(e_1)+r_2g(e_2)+\ldots=r_2g(e_2),$$

$$h(r_1e_1+r_2e_2+\ldots)=r_1h(e_1)+r_2h(e_2)+\ldots,$$

где $r_1, r_2, \ldots$ – рациональные числа.

Теперь эти два равенства можно сложить, раскрыть скобки и перегруппировать:

$$g(r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_\alpha e_\alpha+\ldots)+h(r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_\alpha e_\alpha+\ldots)=$$
$$=r_1(g(e_1)+h(e_1))+r_2(g(e_2)+h(e_2))+\ldots$$
$$\ldots+r_\alpha(g(e_\alpha)+h(e_\alpha))+\ldots=r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_\alpha e_\alpha+\ldots$$

Следовательно, мы доказали, что для любого действительного $x$ выполнено соотношение $g(x)+h(x)=x$. Кроме того,

$$g(r_1T_1+x_1)=g(r_1e_1+x_1)=r_1g(e_1)+g(x_1)=g(x_1),$$

$$h(r_2T_2+x_2)=h(r_2e_2+x_2)=r_2h(e_2)+h(x_2)=h(x_2),$$

т.е. функции $g(x)$ и $h(x)$ – периодические с периодами $T_1$ и $T_2$. Более того, они являются периодическими с периодами $rT_1$ и $rT_2$ для любого рационального $r$. Итак, мы получили искомое разложение в классе аддитивных функций.

«Надо бы еще поэкспериментировать с базисом Гамеля и определить функции на элементах базиса немного по-другому... – подумал Макс. – С помощью базиса Гамеля я могу построить бесконечно много таких разложений для линейной, и даже для любой аддитивной функции. Да и решение Софьи вытекает из моего решения с базисом Гамеля».

**Упражнения**

**3.** Существуют ли такие периодические функции $g(x)$ и $h(x)$, что $g(x)+h(x)=a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$?

**4.** Решите задачу 4, переопределив функцию Софьи.

**5.** Можно ли представить в виде суммы двух периодических функций следующие функции: а) $f(x)=x+\sin x$; б) $f(x)=[x]$ (целая часть числа $x$)?

**6.** Можно ли представить функцию $f(x)=a^x$, где $a>0, a\neq 1$, в виде произведения двух периодических функций?

*Авторы благодарят Л.Штейнгарца и И.Тёмкина за полезные обсуждения.*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

# Задачи с поршнями и перегородками

*А.ЧЕРНОУЦАН*

Первая часть статьи была посвящена задачам, для решения которых достаточно было применить уравнение состояния идеального газа. В этой части статьи – задачи с термодинамическим содержанием.

### Термодинамика идеального газа

Начнем с задачи, в которой перегородка (пробка) обеспечивает постоянство объема газа (см. задачу 3 из первой части статьи).

**Задача 14.** *В бутылке объемом V находится идеальный одноатомный газ. Чтобы вытащить из бутылки пробку, к ней надо приложить силу F. Какое количество теплоты можно вместо этого передать газу, чтобы пробка вылетела сама? Площадь сечения горлышка бутылки S.*

**Решение**. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа равна

$$U=\frac{3}{2}\nu RT=\frac{3}{2}pV,$$

а изменение внутренней энергии при постоянном объеме $V$ составляет

$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R\Delta T=\frac{3}{2}V\Delta p.$$

Поскольку работа газа $A$ в изохорном процессе равна нулю, из первого закона термодинамики $Q=\Delta U+A$ находим

$$Q=\Delta U=\frac{3}{2}V\Delta p.$$

Для преодоления трения покоя дополнительная сила давления должна быть равна силе $F$, необходимой для вытаскивания пробки:

$$S\Delta p=F.$$

Окончательно получаем

$$Q=\frac{3}{2}V\frac{F}{S}.$$

Аналогичным образом можно переформулировать задачу 4 из первой части статьи – надо вместо накачивания газа его нагревать. Уравнения термодинамики будут при этом такими же, как в задаче 14, а механическая часть – как в задаче 4.

В следующей задаче подвижный поршень обеспечивает постоянство давления газа.

**Задача 15** (ЕГЭ). *В вертикальном цилиндре под поршнем массой m находится идеальный одноатомный газ. Газу сообщают количество теплоты Q. На какое расстояние $\Delta h$ сместится поршень? Площадь поршня S, атмосферное давление $p_0$.*

**Решение.** Из условия механического равновесия поршня следует, что давление газа под поршнем постоянно и равно

$$p=p_0+\frac{mg}{S}.$$

В этом случае изменение внутренней энергии и работа газа равны соответственно

$$\Delta U=\frac{3}{2}p\Delta V \quad \text{и} \quad A=p\Delta V.$$

Из первого закона термодинамики,

$$Q=\Delta U+A=\frac{3}{2}p\Delta V+p\Delta V=\frac{5}{2}p\Delta V.$$

Окончание. Начало см. в предыдущем номере журнала.

Подставив сюда $p = p_0 + \frac{mg}{S}$ и $\Delta V = S\Delta h$, получим

$$\Delta h = \frac{2}{5}\frac{Q}{p_0 S + mg}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда отсутствует теплообмен газа с внешними телами.

**Задача 16** (олимпиада «Ломоносов-2011»). *На столе покоится вертикально расположенный цилиндрический сосуд. В сосуде под тяжелым подвижным поршнем находится гелий. Сверху на поршень очень медленно опускают груз массой m. На сколько изменяется при этом внутренняя энергия гелия? Теплообменом гелия с окружающей средой можно пренебречь. Масса груза мала по сравнению с массой поршня. Начальная высота H поршня над дном сосуда известна.*

**Решение.** При малых изменениях объема и давления изменение внутренней энергии гелия равно (см. задачу 13 в первой части статьи)

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p\Delta V + V\Delta p),$$

а работа газа равна

$$A = p\Delta V,$$

где $V = SH$, $\Delta p = mg/S$. В этих выражениях отброшены члены порядка $\Delta p\Delta V$. Подставляя $\Delta U$ и $A$ в первый закон термодинамики

$$0 = \Delta U + A,$$

получим

$$p\Delta V = -\frac{3}{5}V\Delta p.$$

Отсюда окончательно находим

$$\Delta U = -A = -p\Delta V = \frac{3}{5}V\Delta p = \frac{3}{5}mgH.$$

Следующая задача наглядно демонстрирует «энергетический» смысл давления газа, выражаемый (для идеального одноатомного газа) формулой $U = (3/2)pV$: давление пропорционально объемной плотности энергии. Если давления в разных частях сосуда одинаковы, то энергия распределена равномерно по всему объему сосуда.

**Задача 17.** *Горизонтальный теплоизолированный цилиндр объемом V = 4 л делится на две части теплонепроницаемым поршнем, по разные стороны от которого находится идеальный одноатомный газ под давлением p = 50 кПа. Одной из этих порций газа сообщают Q = 30 Дж тепла. Каким станет давление в сосуде?*

**Решение.** На первый взгляд, в задаче явно недостаточно данных – не заданы ни начальные объемы отсеков, ни их начальные температуры (которые могут быть разными – ведь поршень не проводит тепло!). Подсказка содержится в условии – там говорится о начальном и конечном давлениях в *сосуде*, а не в отсеках. Действительно, в состоянии равновесия давления в отсеках должны быть одинаковыми, что следует из условия механического равновесия поршня. Запишем первый закон термодинамики для всего газа:

$$Q = U' - U$$

(работа газа над внешними телами равна нулю), где

$$U = U_1 + U_2 = \frac{3}{2}pV_1 + \frac{3}{2}pV_2 = \frac{3}{2}pV,$$

$$U' = U_1' + U_2' = \frac{3}{2}p'V_1' + \frac{3}{2}p'V_2' = \frac{3}{2}p'V$$

(штрихами обозначены конечные значения соответствующих величин). Получаем

$$Q = \frac{3}{2}(p' - p)V,$$

откуда находим

$$p' = p + \frac{2}{3}\frac{Q}{V} = 55 \text{ кПа}.$$

В следующей задаче движение поршня определяется не только силами давления газов, но и силой сухого трения, действующей на поршень со стороны стенок цилиндра.

**Задача 18** (ЕГЭ). *В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится одноатомный идеальный газ. Первоначальное давление газа $p_1 = 4\cdot 10^5$ Па. Расстояние от дна сосуда до поршня равно L. Площадь поперечного сечения поршня $S = 25$ см$^2$. В результате медленного нагревания газ получил количество теплоты Q = 1,65 кДж, а поршень сдвинулся на расстояние x = 10 см (рис.1). При движении поршня на него со стороны стенок сосуда действует сила трения величиной $F_{тр} = 3\cdot 10^3$ Н. Найдите L. Считайте, что сосуд находится в вакууме.*

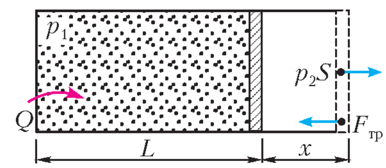



Рис. 1

**Решение.** Изменение состояния газа происходит в два этапа. Сначала газ изохорно нагревается до тех пор, пока сила давления на поршень не станет равной силе трения $F_{тр}$, т.е. пока давление не вырастет до $p_2 = F_{тр}/S$. После этого поршень медленно переместится на расстояние x, давление газа будет при этом оставаться равным $p_2$ (нагревание медленное, поршень все время находится почти в равновесии). Однако нет необходимости рассматривать эти этапы по отдельности, можно записать первый закон термодинамики сразу применительно к начальному и конечному состояниям:

$$Q = A + (U_2 - U_1) = F_{тр}x + \left(\frac{3}{2}\frac{F_{тр}}{S}(L + x)S - \frac{3}{2}p_1(LS)\right).$$

Выражая отсюда L, получим

$$L = \frac{Q - (5/2)F_{тр}x}{(3/2)(F_{тр} - p_1 S)} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Важной особенностью следующих двух задач является, как и в предыдущей задаче, медленность изменения состояния системы. Это позволяет считать, что во всех промежуточных состояниях выполняется условие механического равновесия.

**Задача 19.** *Теплоизолированный сосуд объемом V имеет форму горизонтального цилиндра, разделенного на две части тонким подвижным поршнем, имеющим низкую теплопроводность. В начальный момент объемы частей равны, в одной части находится одноатомный идеальный газ при температуре $T_1$, в другой – при температуре $T_2$, давление в сосуде равно $p_0$. Какая температура установится в сосуде после медленного прихода системы в равновесное состояние? Какими станут объемы частей сосуда? Сколько тепла перейдет через поршень от одного газа к другому?*

**Решение.** Вследствие медленности теплообмена поршень при своем перемещении все время находится в равновесии, давление p по обе стороны от поршня остается одним и тем же и равным $p_0$. Последнее утверждение следует из закона сохранения энергии:

$$\frac{3}{2}pV_1 + \frac{3}{2}pV_2 = \frac{3}{2}p_0\frac{V}{2} + \frac{3}{2}p_0\frac{V}{2}$$

(внутренняя энергия сохраняется, поскольку работа всего газа и полученное им количество теплоты равны нулю). Чтобы найти конечную температуру $T$, запишем уравнение, выражающее условие сохранения количества вещества:

$$\frac{p_0V}{RT} = \frac{p_0(V/2)}{RT_1} + \frac{p_0(V/2)}{RT_2}.$$

Отсюда получим

$$T = \frac{2T_1T_2}{T_1+T_2}.$$

Конечные объемы найдем из уравнений изобарного процесса:

$$\frac{V_1}{V/2} = \frac{T}{T_1} \text{ и } \frac{V_2}{V/2} = \frac{T}{T_2},$$

откуда

$$V_1 = \frac{VT_2}{T_1+T_2} \text{ и } V_2 = \frac{VT_1}{T_1+T_2}.$$

Количество теплоты, полученное, например, первым газом через поршень, вычисляется из первого закона термодинамики для изобарного процесса:

$$Q_1 = \Delta U_1 + A_1 = \frac{3}{2}p_0\left(V_1 - \frac{V}{2}\right) + p_0\left(V_1 - \frac{V}{2}\right) = \frac{5}{2}p_0\left(V_1 - \frac{V}{2}\right) = \frac{5}{4}p_0V\frac{T_2-T_1}{T_1+T_2}.$$

**Задача 20.** *В цилиндрической трубке с теплонепроницаемыми стенками имеются две жестко укрепленные перегородки 1 и 2 и свободно движущийся теплонепроницаемый поршень 3 (рис.2,а). В начальный момент времени объем $V_1$ между перегородками 1 и 2 и объем $V_2$ между перегородкой 2 и поршнем 3 заполнены одноатомным идеальным газом с давлением $p_0$ и температурой $T_0$. При этом поршень 3 неподвижен, так как вся система находится в атмосфере с тем же давлением $p_0$. Через перегородку 1 в объем $V_1$ медленно передается количество теплоты Q. Какая температура установится в пространстве между перегородкой 1 и поршнем 3? Какое количество теплоты перейдет через перегородку 2?*

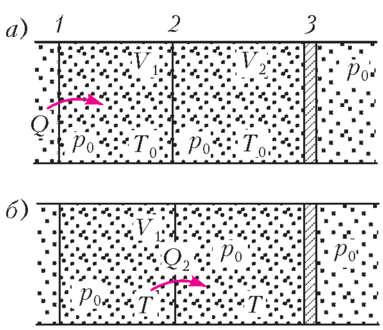



Рис. 2

**Решение**. В рассматриваемой системе в процессе медленных процессов теплопередачи через перегородки *1* и *2* поршень *3* все время остается в равновесии, т.е. газ в правой секции нагревается изобарно (рис.2,*б*), и первый закон термодинамики принимает вид

$$Q_2 = \Delta U_2 + A_2 = \frac{5}{2}\nu_2R(T-T_0),$$

где $Q_2$ – количество теплоты, прошедшее через перегородку *2*, $T$ – установившаяся температура. В то же время газ в левой секции нагревается изохорно, и первый закон термодинамики имеет вид

$$Q - Q_2 = \frac{3}{2}\nu_1R(T-T_0).$$

Выразив $\nu_1$ и $\nu_2$ из уравнения Менделеева–Клапейрона для начальных состояний:

$$\nu_1 = \frac{p_0V_1}{RT_0}, \quad \nu_2 = \frac{p_0V_2}{RT_0},$$

получим систему уравнений

$$Q_2 = \frac{5}{2}\frac{p_0V_2}{T_0}(T-T_0), \quad Q - Q_2 = \frac{3}{2}\frac{p_0V_1}{T_0}(T-T_0),$$

из которой находим

$$T = T_0 + \frac{2QT_0}{p_0(3V_1+5V_2)}, \quad Q_2 = Q\frac{5V_2}{3V_1+5V_2}.$$

В последующих задачах происходит изменение внутренней энергии газа одновременно с изменением механической энергии тел. Иногда оказывается удобным записывать не первый закон термодинамики для газа, а обобщенную форму этого закона для всей системы, рассматривая изменение (или сохранение) полной энергии, равной сумме внутренней и механической энергий. Это уравнение можно записать в виде

$$Q = (\Delta U + \Delta E_{\text{мех}}) + A,$$

где $A$ – работа над внешними (по отношению к системе) телами, которая обычно равна нулю.

**Задача 21** (олимпиада «Ломоносов-2010»). *В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится идеальный одноатомный газ. В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной жесткостью k = 100 Н/м, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра (рис.3). Пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда $h_1 = 0,2$ м. Найдите количество теплоты Q, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда увеличилось до $h_2 = 0,3$ м. Теплоемкостью сосуда, теплообменом с окружающей средой и трением можно пренебречь.*

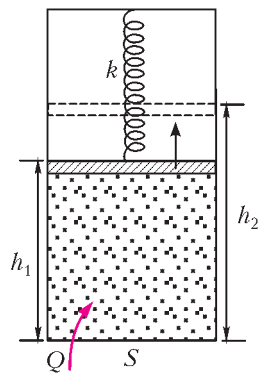



Рис. 3

**Решение.** Если записать первый закон термодинамики *для газа* в виде

$$Q = \Delta U + A,$$

то в него войдет работа *газа над поршнем*. Требуется дополнительно рассмотреть механическую систему поршень–пружина и, поскольку кинетическая энергия поршня в конечном состоянии равна нулю, записать, что работа газа равна работе пружины с противоположным знаком, т.е. равна изменению ее потенциальной энергии:

$$A = -A_{\text{упр}} = \Delta E_{\text{п}} = \frac{kh_2^2}{2} - \frac{kh_1^2}{2}.$$

Однако удобнее записать закон сохранения энергии сразу для системы газ–поршень–пружина, включив в него как внутреннюю, так и механическую энергию:

$$Q = (U_2 + E_{\text{п}2}) - (U_1 + E_{\text{п}1}) = \Delta U + \Delta E_{\text{п}}.$$

Остается вычислить изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{3}{2}p_2V_2 - \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{3}{2}\frac{kh_2}{S}Sh_2 - \frac{3}{2}\frac{kh_1}{S}Sh_1 = \frac{3}{2}\left(kh_2^2 - kh_1^2\right)$$

(давления $p_1$ и $p_2$ найдены из условий механического равновесия поршня: $p_1S = kh_1$ и $p_2S = kh_2$). Окончательно получаем

$$Q = \Delta U + \Delta E_{\text{п}} = 2k\left(h_2^2 - h_1^2\right) = 10 \text{ Дж}.$$

**Задача 22.** *В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой m, находится идеальный одно-*

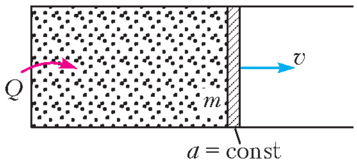


Рис. 4

*атомный газ. Газ нагревают. Поршень, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость $v$ (рис.4). Найдите количество теплоты Q, сообщенное газу к этому моменту. Вне сосуда – вакуум.*

**Решение.** Поскольку поршень движется равноускоренно, действующая на него со стороны газа сила $F = pS$, где $p$ – давление газа и $S$ – площадь поршня, постоянна, т.е. процесс расширения газа происходит при постоянном давлении. По теореме о кинетической энергии работа газа над поршнем равна приобретенной поршнем кинетической энергии:

$$A = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменение внутренней энергии газа в этом изобарном процессе равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V = \frac{3}{2}A = \frac{3}{4}mv^2.$$

Для полученного количества теплоты находим

$$Q = \Delta U + A = \frac{5}{4}mv^2.$$

В следующих задачах основным уравнением является закон сохранения полной энергии для замкнутой системы.

**Задача 23.** *В высоком теплоизолированном цилиндре под поршнем находится гелий. Поршню толчком сообщают вверх скорость $v_0 = 2$ м/с. На сколько выше начального положения окажется поршень после прихода системы в равновесие? Над поршнем газа нет.*

**Решение.** Поскольку тела системы работу не совершают и тепла не получают, полная энергия при переходе из начального состояния в конечное сохраняется (все буквенные обозначения очевидны из рисунка 5):

$$mgh_1 + \frac{mv_0^2}{2} + \frac{3}{2}p_1(Sh_1) = mgh_2 + \frac{3}{2}p_2(Sh_2).$$

Условия равновесия поршня в начальном (до толчка) и в

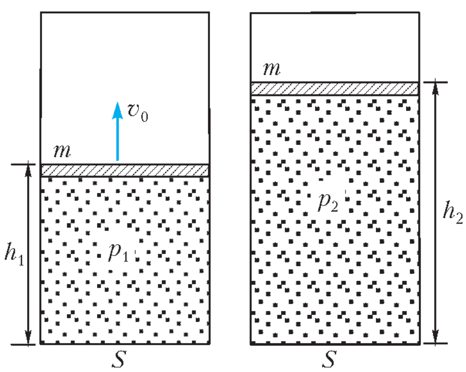


Рис. 5

конечном состояниях имеют вид

$$p_1S = p_2S = mg.$$

С учетом этого из закона сохранения энергии получим

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{5}{2}mgh_1 = \frac{5}{2}mgh_2,$$

откуда найдем

$$h_2 - h_1 = \frac{v_0^2}{5g} = 0{,}08 \text{ м}.$$

**Задача 24.** *В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре $T_1 = 240$ К. На поршне лежит груз массой, равной половине массы поршня. Груз мгновенно убирают и дожидаются прихода системы к равновесию. Чему станет равна температура $T_2$ газа? Над поршнем газа нет.*

**Решение.** Приравняем полную энергию системы сразу после удаления груза к энергии в конечном состоянии (обозначения ясны из рисунка 6):

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_2,$$

где $m$ – масса поршня. Запишем условие равновесия поршня

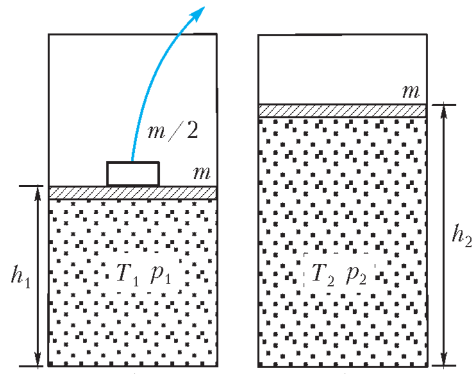


Рис. 6

с грузом и уравнение Менделеева–Клапейрона для гелия в начальном состоянии:

$$p_1S = (m + 0{,}5m)g, \quad p_1(Sh_1) = \nu RT_1,$$

откуда получим

$$\frac{3}{2}mgh_1 = \nu RT_1.$$

Аналогичные уравнения для конечного состояния:

$$p_2S = mg, \quad p_2(Sh_2) = \nu RT_2$$

приводят к соотношению

$$mgh_2 = \nu RT_2.$$

Подставив полученные соотношения в закон сохранения энергии, найдем

$$T_2 = \frac{13}{15}T_1 = 208 \text{ К}.$$

**Задача 25.** *В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре $T_1 = 300$ К. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа оказался в 1,5 раза больше начального. Найдите конечную температуру газа $T_2$. Над поршнем газа нет.*

**Решение**. Поскольку система не получает тепла и не совершает работу над внешними телами, полная энергия системы сохраняется (обозначения показаны на рисунке 7):

$$\frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 + \frac{kx^2}{2},$$

где деформация пружины $x = 1{,}5h - h = 0{,}5h$, если $h$ – начальная высота поршня. Из условия равновесия поршня в конечном состоянии $p_2S = k(0{,}5h)$ и уравнения Менделеева–Клапейрона $p_2(S \cdot 1{,}5h) = \nu RT_2$ получим

$$kh^2 = \frac{4}{3}\nu RT_2.$$

После подстановки в закон сохранения энергии найдем

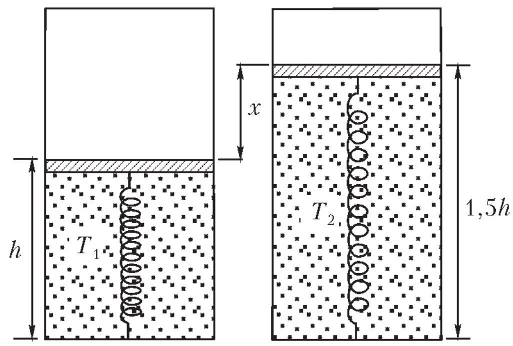



Рис. 7

искомую конечную температуру:

$$T_2 = 0{,}9\ T_1 = 270\ \text{К}.$$

**Задача 26** (ЕГЭ). *В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр (рис.8). В цилиндре находится ν = 0,1 моль гелия, запертого поршнем. Поршень массой M = 90 г удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально со скоростью v = = 400 м/с, и застревает в нем. Как изменится температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с сосудом и поршнем.*

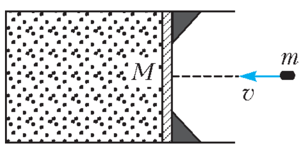



Рис. 8

**Решение.** Так как при застревании пули в поршне часть механической энергии переходит в их внутреннюю энергию, сначала надо с помощью закона сохранения импульса

$$mv = (m+M)V$$

найти скорость поршня с пулей сразу после удара:

$$V = \frac{mv}{m+M}.$$

Теперь можно записать закон сохранения полной энергии:

$$\frac{(m+M)V^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2$$

(конечная скорость равна нулю). Окончательно получим

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{(m+M)V^2}{3\nu R} = \frac{m^2v^2}{3(m+M)\nu R} = 64\ \text{К}.$$

**Задача 27.** *В длинном горизонтальном цилиндре между двумя одинаковыми поршнями находится ν = 0,1 моль гелия. В начальный момент один поршень покоится, а другой приближается к нему со скоростью v = 12 м/с (рис.9,а). На сколько градусов максимальная температура газа больше начальной? Массы поршней m = 415 г. Трением и теплообменом, а также механической энергией и импульсом газа пренебречь. За поршнями газа нет.*

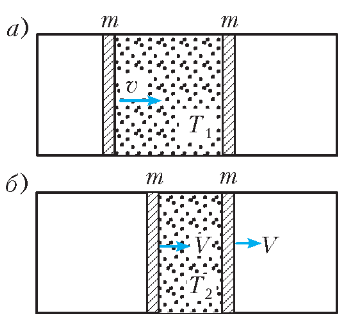



Рис. 9

**Решение**. Максимум температуры газа достигается в тот момент, когда скорости поршней сравняются (рис.9,*б*). Это утверждение становится очевидным в системе отсчета центра масс, где кинетическая энергия поршней в рассматриваемый момент обращается в ноль, т.е. внутренняя энергия достигает максимума. Скорость $V$ поршней в этот момент найдем из закона сохранения импульса

$$mv = 2mV,$$

после чего из закона сохранения полной энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{(2m)V^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT_2$$

найдем изменение температуры:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mv^2}{6\nu R} = 12\ \text{К}.$$

### Упражнения

**1.** В цилиндре под поршнем находится газ, удерживаемый в объеме 0,5 $м^3$ силой тяжести поршня и силой атмосферного давления. Какую работу совершит газ при нагревании, если его объем при этом возрастет в 2 раза? Атмосферное давление 100 кПа, масса поршня 10 кг, площадь поршня $10^{-3}$ $м^2$.

**2.** В вертикальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой 10 кг, находится одноатомный идеальный газ. Первоначальное давление газа $2\cdot10^5$ Па. Расстояние от дна сосуда до поршня $H$, площадь поперечного сечения поршня 10 $см^2$. В результате медленного нагревания газ получил 290 Дж тепла, а поршень сдвинулся на расстояние 20 см. При движении поршня на него со стороны стенок сосуда действует сила трения величиной 200 Н. Найдите $H$. Теплопроводностью стенок и поршня пренебречь. Атмосферное давление $10^5$ Па.

**3.** В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 200 К. Над поршнем сначала удерживают груз так, что он едва касается поверхности поршня, а затем отпускают. Какой станет температура газа после установления равновесия? Масса груза равна половине массы поршня, над поршнем газа нет.

**4.** В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 200 К. Температуру быстро (так, что поршень не успевает сдвинуться с места) повышают до 250 К. Чему станет равна абсолютная температура газа после прихода системы к равновесию? Над поршнем газа нет.

**5.** В вертикальном теплоизолированном цилиндре, легкий поршень которого удерживается в неподвижном состоянии двумя одинаковыми гирями, находится идеальный одноатомный газ. Давление вне цилиндра равно нулю. Во сколько раз изменится абсолютная температура газа, если одну из гирь снять, а затем, подождав установления равновесия, поставить обратно?

**6.** В высоком вертикальном цилиндре под поршнем массой 16,6 кг находится 0,1 моль гелия при температуре 100 К. Вначале поршень удерживают на высоте 100 см, а затем отпускают. На какой высоте окажется поршень после прихода системы к равновесию? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

**7.** В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа увеличился в 4 раза. Во сколько раз при этом уменьшилось давление? Над поршнем газа нет.

**8.** В очень длинном горизонтальном цилиндре между двумя поршнями массами 0,4 кг и 0,8 кг, находится 0,1 моль гелия при температуре 150 К. Вначале поршни удерживают в покое, затем одновременно отпускают. Найдите максимальную скорость более легкого поршня. Трением, теплообменом и механической энергией газа пренебречь. Вне поршней газа нет.

# XXXIII Турнир городов

## ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

### Базовый вариант

*8–9 классы*

**1** (3).[1] Под одной из клеток доски $8\times 8$ зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад?

*Н.Стрелкова*

**2** (4). Существует ли натуральное число, у которого нечетное количество четных натуральных делителей и четное количество нечетных?

*Г.Жуков*

**3** (4). Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников $ABC$ и $ADC$ касаются диагонали $AC$ в точках $X$ и $Y$. Вписанные окружности треугольников $BCD$ и $BAD$ касаются диагонали $BD$ в точках $Z$ и $T$. Докажите, что если все точки $X$, $Y$, $Z$, $T$ различны, то они являются вершинами прямоугольника.

*Р.Гордин*

**4.** В выражении 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким а) (2) наибольшим; б) (3) наименьшим может быть это число?

*И.Акулич*

**5** (5). У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных?

*И.Высоцкий*

*10–11 классы*

**1** (4). Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят ровно три ребра, причем хотя бы два из этих трех ребер равны. Докажите, что многогранник имеет хотя бы три равных ребра.

*В.Произволов*

**2** (4). Дана клетчатая полоска из $2n$ клеток, пронумерованных слева направо следующим образом:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots,\ -2,\ -1.$$

По полоске перемещают фишку, каждым ходом сдвигая ее на число клеток, указанное в текущей клетке (вправо, если число положительно, и влево, если отрицательно). Известно, что фишка, начав с любой клетки, обойдет все клетки полоски. Докажите, что число $2n+1$ простое.

*А.Грибалко*

**3** (5). На плоскости нарисовали кривые $y=\cos x$ и $x=100\cos 100y$ и отметили все точки их пересечения, координаты которых положительны. Пусть $a$ – сумма абсцисс, $b$ – сумма ординат этих точек. Найдите $a/b$.

*И.Богданов*

**4** (5). Четырехугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду $AB$, а другая – хорду $CD$, отметим их точку касания $X$. Докажите, что все такие точки $X$ лежат на одной окружности.

*Фольклор (предложил А.Бердников)*

**5** (5). Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски $8\times 8$, а черная – на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый – своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

*А.Толпыго*

### Сложный вариант

*8–9 классы*

**1** (4). В ряд лежит четное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более чем на 1 г.

*А.Шаповалов*

**2** (4). См. задачу М2271а «Задачника «Кванта».

**3** (6). В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож $N$-го разряда $N$ суток дежурит, потом $N$ суток спит, снова $N$ суток дежурит, $N$ – спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

*А.Бердников*

**4** (6). См. задачу М2270 «Задачника «Кванта».

**5** (8). Пусть $p$ – простое число. Набор из $p+2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовем «интересным», если сумма любых $p$ из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы.

*А.Полянский*

**6** (8). Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого клиента есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента,

[1] Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

которого он еще не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых $N$ позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем $N$ он гарантированно сможет это сделать?

*Г.Жуков*

**7** (8). В равностороннем треугольнике $ABC$ провели высоту $AH$. В треугольнике $ABH$ отметили точку пересечения биссектрис $I$. В каждом из треугольников $ABI$, $BCI$ и $CAI$ отметили по точке пересечения биссектрис – $L$, $K$ и $J$ соответственно. Найдите величину угла $KJL$.

*К.Голубев*

*10—11 классы*

**1** (4). См. задачу 3 сложного варианта для 8–9 классов.

**2** (5). См. задачу М2271б «Задачника «Кванта».

**3** (6). Докажите, что для любого натурального $n$ существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что при всех целых $x$ число

$$\left(\ldots\left(\left(x^2+a_1\right)^2+a_2\right)^2+\ldots+a_{n-1}\right)^2+a_n$$

делится на $2n-1$.

*А.Бердников*

**4** (6). Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две выбранные точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше чем $6\sqrt{2}$.

*В.Произволов*

**5** (8). Дан треугольник $ABC$ и прямая $l$, касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через $l_a, l_b, l_c$ прямые, симметричные $l$ относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику $ABC$.

*А.Заславский*

**6.** а) (3) См. задачу М2274а «Задачника «Кванта».
б) (6) См. задачу М2274б «Задачника «Кванта».

**7.** У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньшие, пока у него не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что

а) (6) в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

б) (3) в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

в) (3) Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков.

*К.Кноп*

### УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

**1.** См. задачу М2269а «Задачника «Кванта».

**2.** В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причем ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещенной и неосвещенной областей колодца лежит в одной плоскости.

*А. Бердников*

**3.** В стране Флатландии двое близоруких полицейских ловят преступника. Все люди являются кругами диаметра 1 м на плоскости. Максимальная скорость полицейского равна 1 м/с, а преступник умеет двигаться со сколь угодно большой скоростью. Полицейский не видит преступника, пока не коснется его, а как только касается – сразу ловит. Преступник все видит. Дело происходит в круге диаметра $D$ м, за который никто не может выйти. При каком наибольшем $D$ полицейские могут действовать так, чтобы гарантированно поймать преступника?

*В.Мокин*

**4.** См. задачу М2273 «Задачника «Кванта».

**5.** Вписанная окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ треугольника $ABC$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$. Вневписанная окружность касается стороны $BC$ и продолжений сторон $CA$, $AB$ в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$. Через середины отрезков $A_1B_1$, $A_2B_2$ провели прямую $l_1$, а через середины отрезков $A_1C_1$, $A_2C_2$ провели прямую $l_2$. Докажите, что $l_1$ и $l_2$ пересекаются на высоте $AH$ треугольника $ABC$.

*А.Полянский*

**6.** Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех $x$. Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.

*Г.Жуков*

*Публикацию подготовили*
*С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов*

# LXXV Московская математическая олимпиада

*6 класс*

**1.** Разрежьте рамку (рис. 1) на 16 равных частей.

*А.Шаповалов*

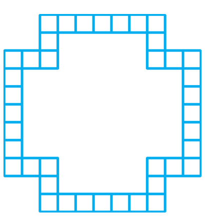


*Рис. 1*

**2, 3, 4.** См. задачи 1, 3, 2 «Кванта» для младших школьников» в «Кванте» №1.

**5.** Замените в равенстве ПИРОГ = = КУСОК + КУСОК + КУСОК + … …+ КУСОК одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные – разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было наибольшим из возможных.

*И.Раскина*

**6.** Известно, что Шакал всегда лжет, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ежик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог еще понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

*А.Хачатурян*

*7 класс*

**1.** Квадрат $3 \times 3$ заполнен цифрами так, как показано на рисунке 2 слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды. Петя прошел, как показано на рисунке 2 справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, – получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

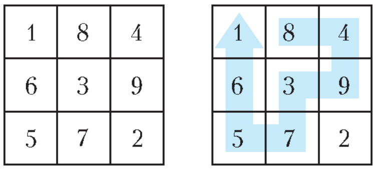


Рис. 2

*И.Ященко*

**2, 3.** См. задачи 4, 2 «Кванта» для младших школьников» в «Кванте» №1.

**4.** На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а еще одна пристань стоит в двух километрах после слияния (рис. 3). Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей – за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех ее частях. Собственная скорость лодки также постоянна.)

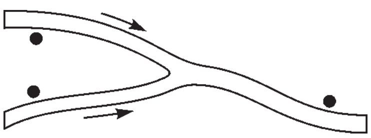


Рис. 3

*В.Гуровиц*

**5.** Вася написал верное утверждение:

«В этой фразе 1/3 всех цифр – цифры 3, а 1/2 всех цифр – цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе 1/... всех цифр – цифры $*$, доли цифр $*$ и $*$ одинаковы и равны 1/..., а доля всех остальных цифр составляет 1/...».

Вставьте вместо звездочек три разные цифры, а вместо многоточий – три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение.

*А.Шаповалов*

**6.** См. задачу 5 «Кванта» для младших школьников» в «Кванте» №1.

*8 класс*

**1.** На доске написаны четыре трехзначных числа, в сумме дающие 2012. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел.

*А.Шаповалов*

**2.** Кузнечик умеет прыгать только ровно на 50 сантиметров. Он хочет обойти 8 точек, отмеченных на рисунке 4 (сторона клетки равна 10 сантиметрам). Какое наименьшее количество прыжков ему придется сделать? (Разрешается посещать и другие точки плоскости, в том числе не узлы сетки. Начинать и заканчивать можно в любых точках.)

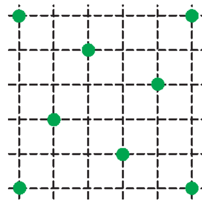


Рис. 4

*Т.Голенищева-Кутузова*

**3.** См. задачу М2271а «Задачника «Кванта».

**4.** В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр $BH$ на сторону $AD$. На отрезке $BH$ отметили точку $M$, равноудаленную от точек $C$ и $D$. Пусть точка $K$ – середина стороны $AB$. Докажите, что угол $MKD$ прямой.

*М.Волчкевич*

**5.** Рациональные числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что все числа $x + y^2 + z^2$, $x^2 + y + z^2$ и $x^2 + y^2 + z$ целые. Докажите, что число $2x$ целое.

*И.Богданов*

**6.** В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа – нули. При каких числах $m$ и $n$, больших 100, такое возможно?

*И.Раскина*

*9 класс*

**1.** В стране Далекой провинция называется *крупной*, если в ней живет более 7% жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся две провинции с меньшим населением такие, что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далекой?

*А.Петухов*

**2.** См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXIII Турнира городов.

**3.** См. задачу 4 для 8 класса.

**4.** См. задачу 5 для 8 класса.

**5.** См. задачу 5 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXIII Турнира городов.

**6.** а) В футбольном турнире участвовали 75 команд. Каждая команда играла с каждой один раз, за победу в матче команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что любые две команды набрали различное количество очков. Найдите наименьшую возможную разность очков у команд, занявших первое и последнее места.

б) Тот же вопрос для $n$ команд.

*А.Блинков*

*10 класс*

**1.** Алеша написал на доске 5 целых чисел – коэффициенты и корни квадратного трехчлена. Боря стер одно из них. Остались числа 2, 3, 4, –5 в каком-то порядке. Восстановите стертое число и докажите, что было написано именно оно.

*Б.Френкин*

**2.** См. задачу М2270 «Задачника «Кванта».

**3.** Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

*А.Бердников*

**4.** По кругу разложено четное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более чем на 1 г.

*А.Шаповалов*

**5.** См. задачу М2272 «Задачника «Кванта».

**6.** Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трехэлементным подмножествам множества $\{1,2,3,\ldots,2^k\}$, а ребра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были разного цвета.

*А.Райгородский*

*11 класс, первый день*

**1.** См. задачу 1 для 10 класса.

**2.** Для заданных значений $a$, $b$, $c$ и $d$ оказалось, что графики функций $y=2a+\dfrac{1}{x-b}$ и $y=2c+\dfrac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y=2b+\dfrac{1}{x-a}$ и $y=2d+\dfrac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

*О.Косухин*

**3.** В треугольнике $ABC$ высоты или их продолжения пересекаются в точке $H$, а $R$ – радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A\le\angle B\le\angle C$, то $AH+BH\ge 2R$.

*В.Панферов, В.Ушаков*

**4.** На собрание пришли $n$ человек ($n>1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что $n$ может быть больше 4.

*П.Сергеев*

**5.** Для $n$ = 1, 2, 3 будем называть числом $n$-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию 1, $(n+2)$, $(n+2)^2$, …, либо является суммой нескольких различных ее членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

*О.Косухин*

**6.** См. задачу М2274 «Задачника «Кванта».

*11 класс, второй день*

**1.** К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

*А.Бегунц*

**2.** На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов $\alpha$ или $\beta$ к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

*О.Косухин*

**3.** Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные $2^n$ слов, состоящих из $n$ букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение $n$ множителей, исправив каждую букву А на $x$, а каждую букву Б – на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от $x$. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от $x$.

*О.Косухин*

**4.** После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались темные пятна общей площади $S$. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных ее сторон, или же вдоль одной из двух ее диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна $S_1$. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой ее диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна $S$. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1:S$ ?

*О.Косухин*

**5.** Обозначим через $S(n,k)$ количество не делящихся на $k$ коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням $x$.

а) Найдите $S(2012,3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011},2011)$ делится на 2012.

*В.Ушаков*

*Публикацию подготовил Б.Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## Первый теоретический тур

*7 класс*

**1.** Школьник Вася, стоя на эскалаторе, поднялся наверх за 1 мин. Его друг Петя, идя по эскалатору вверх, поднялся за 40 с. Сколько времени понадобится Пете, чтобы по тому же эскалатору спуститься вниз (против движения эскалатора), если он будет бежать со скоростью в три раза быстрее, чем идет?

*Д.Паринов*

**2.** На рисунке 1 изображен график зависимости скорости автомобиля $v$ от пройденного им пути $s$. Какое расстояние проехал автомобиль за первые 2 минуты своего движения?

*О.Шведов*

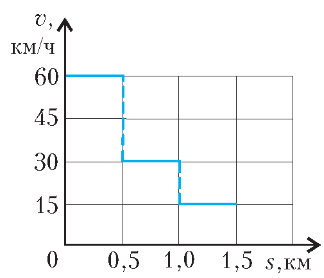



*Рис. 1*

**3.** Школьницы Ирина, Карина и Марина бегают по кругу в одном направлении с постоянными скоростями. Ирина и Карина встречаются каждые 2 мин. Карина и Марина встречаются каждые 3 мин. Как часто встречаются Ирина и Марина?

*А.Ноян*

**4.** Вес груза в воздухе составляет 17 Н. Когда этот груз опустили в сосуд с водой, имеющий форму куба со стороной 1 дм, он утонул, полностью покрывшись водой, а уровень воды поднялся на 2 см, не достигнув верхнего края сосуда. Определите плотность материала груза.

*О.Шведов*

### 8 класс

**1.** Владислав и Станислав участвовали в велогонках. На старте Владислав, двигаясь вдвое быстрее Станислава, ушел в отрыв. Через 10 мин после старта велосипед Владислава сломался, и оставшуюся часть дистанции велогонщик шел пешком со скоростью 6 км/ч. Участники гонки достигли финиша одновременно через 30 мин после старта. Считая скорость Станислава постоянной, найдите длину дистанции от старта до финиша.

*О.Шведов*

**2.** Гантель состоит из двух шаров одинаковых радиусов массами 3 кг и 1 кг. Шары закреплены на концах однородного стержня массой 1 кг так, что расстояние между их центрами равно 1 м. На каком расстоянии от центра шара массой 3 кг нужно закрепить на стержне нить, чтобы гантель, подвешенная за эту нить, висела горизонтально?

*Фольклор*

**3.** Школьница Алиса подвешивала к пружине гири известной массы и изучала зависимость удлинения пружины $x$ от массы $m$ подвешенной к ней гири. Свои результаты Алиса представила на графике (рис.2). Затем Алиса провела опыт с грузом неизвестных массы и плотности. Поместив груз в сосуд с водой, Алиса увидела, что прикрепленная к грузу пружина растянулась на 3 см, при этом груз не соприкасался с поверхностью воды или дном сосуда. Этот же груз, находящийся в воздухе, растягивал пружину на 4 см. Определите массу груза в граммах и объем груза в миллилитрах. Плотность воды 1000 кг/м$^3$.

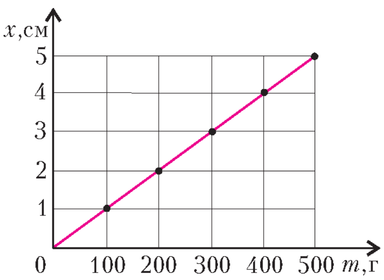


Рис. 2

*О.Шведов*

**4.** Сосуд в форме куба с ребром 1 дм на 2/3 заполнен льдом, имеющим температуру 0 °С. Туда быстро долили воду, имеющую температуру +100 °С, и сосуд оказался заполненным доверху. Считая, что теплообмен с окружающей средой отсутствует и что лед не всплывает, определите, весь ли лед растает и на сколько опустится уровень воды в сосуде к тому моменту времени, когда система придет в состояние теплового равновесия. Плотности воды и льда 1000 кг/м$^3$ и 900 кг/м$^3$ соответственно, удельные теплоемкости воды и льда 4200 Дж/(кг · °С) и 2100 Дж/(кг · °С) соответственно, удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

*А.Ноян*

### 9 класс

**1.** Лодка отплыла от берега реки, текущей со скоростью, постоянной по всей ширине реки. В системе отсчета, связанной с водой, лодка все время двигалась перпендикулярно берегу, причем движение было равнозамедленным с начальной скоростью 2 м/с. На рисунке 3 изображен вид сверху на траекторию лодки в системе отсчета, связанной с берегом реки. Ось $x$ направлена вдоль берега реки, ось $y$ – перпендикулярно берегу. Определите скорость течения реки и модуль ускорения лодки.

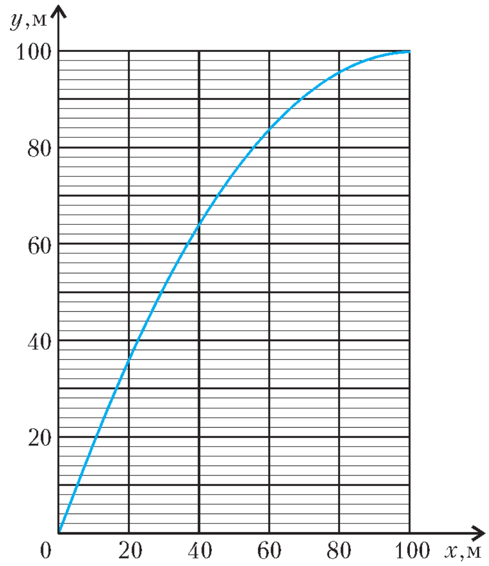


Рис. 3

*А.Ноян*

**2.** Когда на льдину поставили груз массой $M = 90$ кг, объем ее надводной части уменьшился на 30%. Потом на льдину вышел школьник Антон, и объем надводной части уменьшился еще на 30%. Найдите массу Антона и массу льдины. Отношение плотностей льда и воды $\rho_л : \rho_в = 0,9$.

*А.Ноян*

**3.** Школьницы Алиса и Василиса нагревают воду в полных стаканах при помощи кипятильников. Кипятильник Василисы является точной копией кипятильника Алисы, увеличенной в три раза, а стакан Василисы – увеличенной в два раза копией стакана Алисы. Кипятильники включают в розетки с одинаковыми напряжениями. Вода у Алисы закипает за 3 мин. За какое время закипит вода у Василисы? Считайте, что вся выделяющаяся энергия идет на нагревание воды. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

*О.Шведов*

**4.** Два зеркала сложены под углом 7° (рис.4). Школьник Станислав направил через маленькое отверстие в одном из зеркал луч лазерной указки перпендикулярно этому зеркалу. Сколько всего отражений испытает луч от этих зеркал?

*О.Шведов*

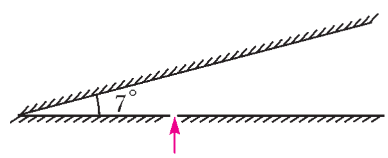


Рис. 4

### 10 класс

**1.** На горизонтальном столе лежит деревянный брусок. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском $\mu = 0,1$. Если приложить к бруску силу, направленную вверх под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, то брусок будет двигаться по столу с ускорением $a = 0,18$ м/с$^2$. Под каким углом $\beta$ надо приложить к бруску такую же по модулю силу, чтобы брусок двигался по столу равномерно? Ответ округлите до целых градусов. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

*М.Семенов*

**2.** На рисунке 5 показан график зависимости модуля силы $F$ растяжения пружины от ее удлинения $x$ (при больших

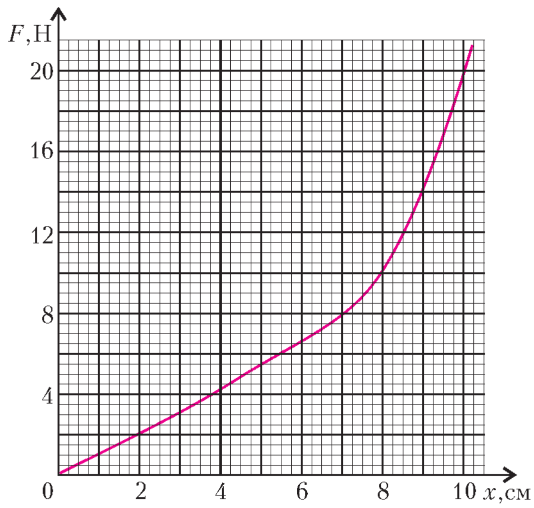



Рис. 5

деформациях пружина не подчиняется закону Гука). Пружину прикрепляют одним концом к потолку. К другому концу пружины, не деформируя ее, аккуратно подвешивают груз массой $m = 650$ г, после чего отпускают груз без начальной скорости. Оцените, на какую максимальную длину растянется пружина. Трением и массой пружины пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с$^2$.

*А.Якута*

**3.** Небольшой пустой тонкостенный цилиндрический стакан объемом $V_0$ переворачивают вверх дном и медленно погружают в глубокий водоем, удерживая ось стакана в вертикальном положении. Над поверхностью водоема находится воздух (атмосферное давление $p_0$), температура которого равна температуре воды, а относительная влажность составляет 100%. По какому закону будет изменяться модуль выталкивающей силы, действующей на стакан, при его погружении от поверхности воды в водоем на глубину $H$? Плотность воды $\rho$, ускорение свободного падения $g$, давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н$.

*М.Семенов*

**4.** После поломки систем отопления и водоснабжения бассейна объемом $V$ часть воды вытекла из него, а оставшаяся часть замерзла. В итоге в бассейне остался лед объемом $(10/27)V$ при температуре 0 °С. В бассейн начинают наливать воду. Какую температуру должна иметь вода, чтобы, когда лед растает и бассейн будет полностью заполнен, вода в нем имела температуру $t = 20$ °С? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$ и $\rho_л = 900$ кг/м$^3$ соответственно, удельные теплоемкости воды и льда $c_в = 4200$ Дж/(кг·°С) и $c_л = 2100$ Дж/(кг·°С) соответственно, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Потерями тепла пренебречь.

**5.** Емкость аккумуляторов мобильных телефонов часто измеряют в миллиампер-часах (мА·ч). Эта величина показывает, сколько часов может работать аккумулятор, давая ток силой в один миллиампер. Емкость некоторого аккумулятора равна $q = 950$ мА·ч. Мобильный телефон после зарядки аккумулятора проработал $t = 80$ ч, а напряжение на аккумуляторе было почти постоянно и равно $U = 3{,}6$ В, после чего аккумулятор разрядился. Чему равна средняя мощность, потребляемая телефоном в этот период времени? Аккумулятор считать идеальным источником.

*М.Ромашка*

### 11 класс

**1.** Рабочим телом теплового двигателя является $\nu = 1$ моль гелия. Цикл работы тепловой машины состоит из линейного в $pV$-координатах участка *1–2* и изотермы *2–1* (рис.6). Максимальный объем гелия в цикле в 7 раз больше минимального. Минимальная температура гелия в цикле составляет $T_0 = 280$ К. Какое количество теплоты было получено гелием в данном цикле от нагревателя? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

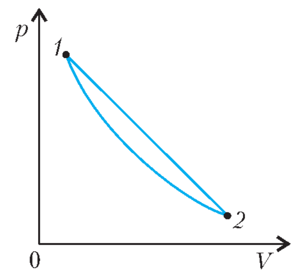



Рис. 6

*О.Шведов*

**2.** В некоторой области пространства созданы однородные электрическое и магнитное поля. Когда электрон влетает в эту область со скоростью $v$ в направлении, показанном стрелкой *1* на рисунке 7, он движется в этой области прямолинейно и равномерно. Когда электрон с такой же по модулю скоростью влетает в электромагнитное поле вдоль стрелки *2*, перпендикулярной направлению стрелки *1*, он тоже движется в поле прямолинейно и равномерно. Определите направления векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$. Найдите отношение модулей $E/B$.

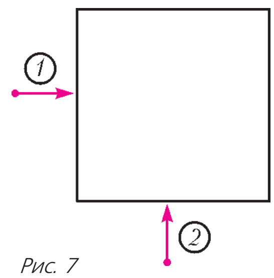



Рис. 7

*О.Шведов*

**3.** На призму, сечение которой имеет вид равнобедренного прямоугольного треугольника, перпендикулярно нижней грани падает луч от лазерной указки (рис.8). Каким должен быть показатель преломления $n$ материала, из которого сделана призма, чтобы свет от указки вышел из призмы наружу только через эту же грань?

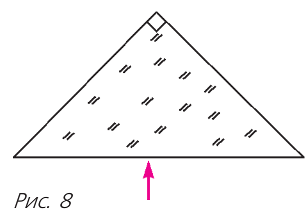


Рис. 8

*О.Шведов*

## Второй теоретический тур

### 8 класс

**1.** Школьник Петя стоит около задней стены последнего вагона поезда, движущегося с постоянной скоростью, и видит через окна поезда столбы линии электропередачи, расположенные вдоль железной дороги на равных расстояниях друг от друга. Когда Петя поравнялся с одним из столбов, он начал считать столбы (приняв этот столб за первый) и одновременно идти со скоростью 1,5 м/с относительно поезда от хвоста к голове поезда. В момент, когда Петя поравнялся со столбом номер 17, пройденный им путь (относительно поезда) был равен 150 м. Петя тотчас развернулся и пошел обратно с той же скоростью, а в момент возвращения в начало своего пути поравнялся с очередным столбом, номер которого по счету Пети был равен 30. С какой скоростью едет поезд и чему равно расстояние между соседними столбами? Известно, что скорость поезда относительно земли больше скорости Пети относительно поезда.

*М.Ромашка*

**2.** Серый Волк, встретив Красную Шапочку на опушке леса, узнал, что в доме ее бабушки лесорубы установили новую систему открывания двери. Волк настолько заинтересовался инновацией, что решил не есть ни бабушку, ни Красную Шапочку, а подробно узнать все детали современной конструкции, зачем и отправился к бабушке вместе с Красной Шапочкой. Оказалось, что система (рис.9) состоит

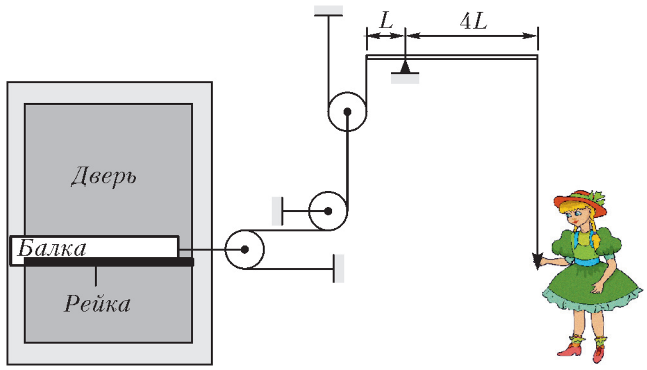



Рис. 9

из тяжелой деревянной балки, способной с помощью троса равномерно передвигаться по шероховатой рейке. По словам лесорубов, на балку при скольжении действует сила трения 320 Н. Трос при помощи системы легких блоков и веревок соединен с рычагом. Трение в осях блоков охотники ликвидировали с помощью смазки. Рычаг пропущен сквозь стену, где закреплен на скрипучей опоре. Плечи рычага соотносятся как 1:4. Дверь открылась, когда Красная Шапочка «потянула за веревочку», привязанную к другому концу рычага, с силой 25 Н. Определите КПД такой системы. Ускорение свободного падения принять равным $10\ \text{м}/\text{с}^2$.

*Е.Вишнякова*

**3.** В одно колено U-образной трубки залили масло, а в другое – воду (рис.10). Жидкости разделены посередине поршнем, который находится в равновесии. Масло закрывают массивным поршнем. Какой массой должен обладать этот поршень, чтобы уровни жидкостей выровнялись, если начальный уровень воды над дном трубки 8 см, а плотности воды и масла $1\ \text{г}/\text{см}^3$ и $0{,}8\ \text{г}/\text{см}^3$ соответственно? Площадь внутреннего сечения трубки $10\ \text{см}^2$, нижний поршень остается в нижней части трубки.

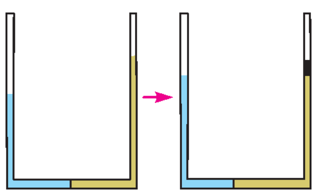


Рис. 10

*Е.Шель*

**4.** Школьница Ирина взяла сосуд с холодной водой и поставила его на электроплитку. Проведя измерения, Ирина выяснила, что температура воды в сосуде увеличивается на 1 °С каждые 20 с. Дождавшись, когда сосуд нагрелся до 30 °С, Ирина сняла его с плитки и поместила в воду металлическую гирю, находившуюся в другом сосуде в тепловом равновесии со смесью воды и льда. Температура в сосуде с водой и гирей установилась равной 25 °С. За какое время этот сосуд будет нагреваться на 1 °С, если Ирина, не вынимая гирю, вновь поставит его на электроплитку? Потерями энергии пренебречь, вода из сосуда в данном процессе не выливалась.

*Е.Шель*

*9 класс*

**1.** Изображенная на рисунке 11 система состоит из грузов массами $m$ и $M$, двух неподвижных и одного подвижного блока. Не лежащие на блоках участки нитей вертикальны. Определите ускорения грузов, считая, что груз массой $M$ при движении сохраняет горизонтальное положение, нити невесомы и нерастяжимы, блоки легкие, трения нет.

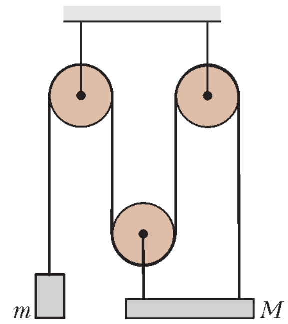



Рис. 11

*О.Шведов*

**2.** Детская игрушка «неваляшка» состоит из двух пластмассовых шаров радиусами $r_1 = 9$ см и $r_2 = 6$ см (рис.12), полых внутри. Игрушка стоит на горизонтальном столе. В нижней точке нижнего шара закреплен маленький груз массой $M = 250$ г. «Неваляшка» обладает следующим свойством: если ее положить набок так, чтобы оба шара касались стола, и отпустить, то она «встанет» и вновь примет вертикальное положение. При каких массах $m_1$ и $m_2$ нижнего и верхнего шаров соответственно игрушка обладает этим свойством? Считайте, что центры масс шаров совпадают с их геометрическими центрами.

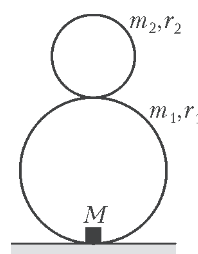



Рис. 12

*М.Ромашка*

**3.** Из проволоки сделали правильную треугольную пирамиду, все ребра которой имеют одинаковую длину и одинаковое сопротивление $R$ (рис.13). К серединам двух противоположных взаимно перпендикулярных ребер подсоединили выводы $A$ и $B$ омметра – прибора для измерения сопротивлений. Что покажет омметр?

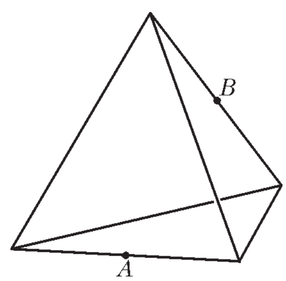



Рис. 13

*А.Ноян*

*10 класс*

**1.** На гладкой горизонтальной поверхности находится клин высотой $h = 30$ см и шириной основания $d = 40$ см. На его гладкой наклонной плоскости располагается маленькая шайба, соединенная с клином при помощи невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через два блока (рис.14). Блоки невесомые и вращаются без трения, масса клина в $n = 8$ раз больше массы шайбы. С каким ускорением начнет двигаться клин после отпускания? Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$. Движение клина – поступательное.

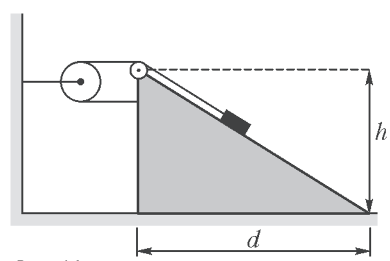



Рис. 14

*К.Парфенов*

**2.** Гладкая полусферическая чаша неподвижно закреплена на столе так, что ее ось симметрии вертикальна. В чашу последовательно кладут два тонких неоднородных стержня одинаковой массы и одинаковой длины, меньшей $\sqrt{2}R$, где

$R$ – радиус чаши. Первый стержень в положении равновесия образует с горизонтом угол $\alpha_1$, а второй – угол $\alpha_2 < \alpha_1$. Затем стержни скрепляют друг с другом боковыми поверхностями так, что они образуют новый тонкий стержень прежней длины, и кладут получившийся составной стержень обратно в чашу. Какой угол с горизонтом будет образовывать в положении равновесия этот составной стержень?

*А.Якута*

**3.** Из проволоки сделали правильную четырехугольную пирамиду (рис.15), все ребра которой имеют одинаковое сопротивление $R$. К серединам двух соседних (перпендикулярных) ребер основания подсоединили выводы $A$ и $B$ омметра – прибора для измерения сопротивлений. Что покажет омметр?

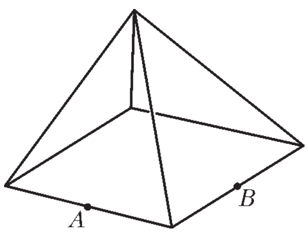


Рис. 15

*А.Ноян*

**4.** По длинному непроводящему стержню может без трения перемещаться бусинка массой $m$ и зарядом $q$ (рис.16). Вдоль стержня на расстоянии $d$ от него перемещают с постоянной скоростью $v_0$ точечный заряд $q$. Считая, что в начальный момент бусинка покоилась и была бесконечно удалена от точечного заряда, определите максимальную скорость $v_{max}$ бусинки. Постройте график зависимости $v_{max}$ от $v_0$.

Рис. 16

*И.Горбатый*

*11 класс*

**1.** Чупа-чупс стоял в углу… За что его поставили, неясно, но стоять ему не очень-то хотелось. Вот он и стал постепенно отставлять свою «ножку» все дальше вдоль биссектрисы того прямого угла между стенками, в который его поставили, а «головой» опираясь о стенки (рис.17). При каком угле $\alpha$ между ножкой и полом чупа-чупс упадет? Считайте, что вся его масса сосредоточена в однородной шарообразной голове радиусом $R$, расстояние от центра головы до конца ножки $l$, коэффициент трения головы о стенки угла $\mu_1$, а ножки об пол $\mu_2$. Решите задачу в общем виде, а затем проведите численный расчет угла $\alpha$ для случая $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}6$, $l = 4R$.

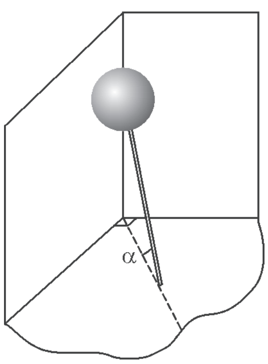


Рис. 17

*М.Семенов*

**2.** Сосуд объемом $V = 1\ м^3$ разделен на две части легким тонким подвижным теплопроводящим поршнем, по одну сторону от которого находится вода, по другую – азот. График зависимости давления в системе от температуры приведен на рисунке 18. Сколько молей воды и сколько молей азота находятся в сосуде? Трения нет, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ Дж/(моль \cdot К)$.

*О.Шведов*

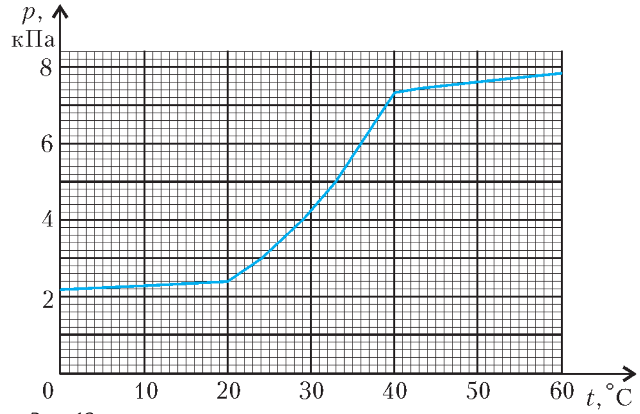


Рис. 18

**3.** Резиновый жгут и пружина в нерастянутом состоянии имеют одинаковые длины. Жесткость пружины $k = 4\ Н/м$. График зависимости модуля $f$ силы растяжения жгута от его удлинения $x$ приведен на рисунке 19. Пружина и жгут очень легкие. Пружину подвешивают за один из концов к потолку, а к ее второму концу прикрепляют конец жгута (пружина и жгут оказываются соединенными последовательно).

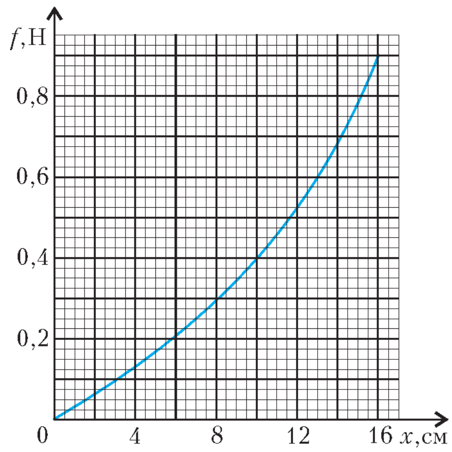


Рис. 19

1) К свободному нижнему концу жгута прикладывают направленную вниз силу $F = 0{,}7$ Н. На какую суммарную величину $X$ растянутся пружина и жгут?

2) Найдите массу $m$ груза, который нужно подвесить к свободному нижнему концу жгута, чтобы суммарное удлинение системы в положении равновесия было равно $L = 20$ см.

3) Оцените энергию $E$, которая будет запасена в жгуте при подвешивании к его свободному нижнему концу покоящегося груза найденной выше массой $m$.

4) Груз этой массой $m$, подвешенный к свободному нижнему концу жгута, заставили свободно колебаться с амплитудой $A = 2$ мм около положения равновесия. Пренебрегая трением, оцените, чему будет равен период $T$ таких колебаний груза.

Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

*А.Якута*

**4.** Летом в ясный солнечный день школьник вышел во двор своего дома с прямоугольным зеркальцем в руках. Поймав зеркальцем солнечный свет, он направил зайчик перпендикулярно на неосвещенную стену дома и стал постепенно отходить от нее. Оказалось, что вначале зайчик имел квадратную форму со стороной $d = 5$ см, а потом его края стали размываться, и он постепенно стал практически круглым с небольшим размытием по краям. Пренебрегая явлением дифракции, объясните наблюдаемый эффект и оцените, при каком расстоянии $L$ от стены ширина размытой области на краю зайчика станет менее 10% от диаметра его ярко освещенной круглой части. Размер зеркальца $5 \times 7$ см, угловой размер Солнца $\varphi \approx 0{,}01$ рад.

*М.Семенов*

*Публикацию подготовили М.Семенов, О.Шведов, А.Якута*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

*(см. «Квант» №3)*

**1.** 1432-й.

В третьем тысячелетии такого года не было, так как к цифрам 2 и 0 можно добавить только 3 и 1, а 2031-й год еще не наступил. Во втором тысячелетии в записи года обязательно есть цифра 1, поэтому добавить к ней можно либо 0, 2, 3, либо 2, 3, 4. На втором месте требуется наибольшая цифра, поэтому второй набор лучше. Расположив в нем цифры в порядке убывания, получим предыдущий счастливый год.

**2.** В круге есть только наивные, иначе самый легкий из тертых ответил бы «Да» на первый вопрос. Тогда самый легкий из богатырей на второй вопрос ответит «Нет».

**3.** а) Не верно; б) верно.

**4.** 15°.

Заметим, что при сложении квадрата вдвое получился прямоугольник с отношением сторон 2 : 1. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, получившийся в итоге, $E$ – вершина прямоугольника, попавшая при втором складывании на сторону $CD$ (рис.1). Тогда в прямоугольном треугольнике $EAD$ катет $AD$ в два раза меньше гипотенузы $AE$, следовательно, $\angle AED = 30°$. Значит, $\angle EAD = 60°$, а искомый угол является половиной угла, дополняющего угол $EAD$ до угла прямоугольника. Таким образом, $\angle BAE = \frac{90° - 60°}{2} = 15°$.

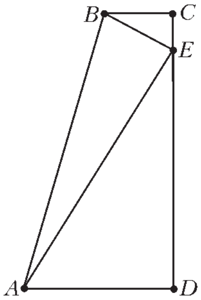


Рис. 1

**5.** а) Можно; б) можно.

Решение пункта б) будет решением и пункта а), поэтому приведем здесь только его.

Одновременно зажжем одну большую свечу и последовательно, одну за другой, пять маленьких. Тем самым будет отмерено 55 минут. В тот момент, когда погаснет пятая маленькая свеча, зажжем сразу две маленьких и погасим их одновременно с тем, как погаснет большая свеча. Тем самым мы получим два огарка, каждый из которых рассчитан на 6 минут. Теперь зажжем новую маленькую свечу и последовательно, один за другим, эти два огарка. Одна минута – это промежуток времени между моментом, когда догорит маленькая свеча, и моментом, когда догорит второй огарок.

Итого мы использовали одну большую свечу и 5 + 2 + 1 = 8 маленьких, то есть потратили $60 + 8 \cdot 11 = 148$ рублей.

## ЗАДАЧИ С ПОРШНЯМИ И ПЕРЕГОРОДКАМИ

**1.** $A$ = 100 кДж. **2.** $H$ = 0,3 м. **3.** $T$ = 240 К.

**4.** $T$ = 230 К. **5.** Увеличится в $\frac{28}{25}$ раза. **6.** $h$ = 70 см.

**7.** В 5 раз. **8.** $v$ = 25 м/с .

## XXXIII ТУРНИР ГОРОДОВ

### Задачи весеннего тура

*Базовый вариант*

*8–9 классы*

**1.** 3 клетки.

Перекопаем угловую клетку $U$. Пусть там табличка. Тогда все клетки на указанном расстоянии от $U$ образуют диагональ, перпендикулярную главной диагонали из $U$. Перекопаем угловую клетку $W$ на одной стороне с $U$. Если и там табличка, то образуется еще одна диагональ, перпендикулярная первой. Диагонали пересекаются по одной клетке, там-то клад и зарыт.

Двух перекапываний может не хватить. Пусть, например, нам не повезло, и в первый раз мы откопали табличку с числом 1. Тогда клад находится на соседней клетке, но таких клеток рядом с любой не менее двух.

**2.** Не существует.

Число должно быть четно, иначе у него 0 нечетных делителей. Пусть наибольшая степень двойки, на которую делится наше число, – это $2^k$. Тогда каждый делитель числа можно однозначно представить в виде $2^m n$, где $m \le k$, а $n$ – нечетный делитель числа. И наоборот, если $n$ – нечетный делитель, то $n$ и $2^k$ взаимно просты, поэтому $2n$, $2^2 n$, ..., $2^k n$ – тоже делители, причем все они четны. Таким образом, из каждого нечетного делителя получаются $k$ различных четных. Значит, всего четных делителей в $k$ раз больше, чем нечетных. Но количество нечетных делителей четно, значит, количество четных – тоже четно.

**3.** Четырехугольник $XZYT$, как и вся картинка, симметричен относительно центра $O$ параллелограмма $ABCD$. Значит, $XZYT$ – параллелограмм. Проверим, что его диагонали равны. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. По известным формулам для расстояния от вершин треугольника до точек касания сторон с вписанной окружностью $AX = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $AY = CX = \frac{1}{2}(a + b - c)$, поэтому $XY = |AX - AY| = |c - a|$, т.е. длина отрезка $XY$ равна разности сторон параллелограмма $ABCD$. Ясно, что тот же результат мы получим и для отрезка $ZT$.

**4.** а) 44800.

В результате расстановки скобок данное выражение можно будет представить в виде дроби, где некоторые из данных чисел попадут в числитель, а другие – в знаменатель. Очевидно, при любой расстановке скобок число 10 попадет только в числитель, а 9 – только в знаменатель. Поэтому, чтобы получить наибольшее возможное число, надо все остальные числа поместить в числитель. Это возможно, и потому наибольшее значение равно $10 : (9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1) = \frac{10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9}$.

б) 7.

Если число 7 попадет в знаменатель дроби, то получится нецелое число, поскольку эту семерку будет не с чем сократить. Следовательно, число 7 должно оказаться в числителе, и получившееся в итоге целое число будет делиться на 7. Но наименьшее целое, кратное 7, – это 7. Остальные числа можно разбить на две группы с равным произведением, причем так, чтобы числа 10 и 9 попали в разные группы: $10 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 = 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1$. Это равенство дает возможность так расставить скобки, чтобы получилось как раз число 7:

$$10 : 9 : (8 : 7 : (6 : (5 : 4 : (3 : 2 : 1)))) = \frac{10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}.$$

**5.** Не могло.

Пусть поменять удалось. Число складок на левом боку уменьшается на два при чесании левого бока и увеличивается на два при чесании правого. Так как сумма не изменилась, то левый и правый бока почесали одинаковое число раз. При каждом почесывании общее число вертикальных складок меняется на 1, т.е. оно меняет четность. Так как всего сделано четное количество почесываний, четность общего числа вертикальных складок в итоге не изменится. Заметим, однако, что четности чисел вертикальных и горизонтальных складок различны, так как их сумма 17 нечетна. Значит, конечное число вертикальных складок не равно начальному числу горизонтальных складок, т.е. поменять друг с другом числа на каждом боку не удастся.

*10–11 классы*

**1.** Пусть есть $n$ вершин, тогда ребер $\frac{3}{2}n$. Для каждой вершины выберем пару равных ребер с общим концом в этой вершине, всего $n$ пар. Если все пары различны, то в них уже $2n$ ребер, что больше чем $\frac{3}{2}n$. Противоречие.

**2.** Допустим, что $2n+1$ – не простое. Тогда среди чисел 2, 3, …, $n$ найдется делитель $d$ числа $2n+1$. Покажем, что начав с него, мы всегда будем попадать только на числа, кратные $d$ (и тем самым всех чисел не обойдем). Для этого занумеруем числа слева направо. Заметим, что отрицательные числа в правой половине ровно на $2n+1$ меньше своего номера, поэтому, если номер кратен $d$, то и число тоже кратно $d$. При сдвиге вправо номер удваивается, поэтому делимость на $d$ как его, так и числа в строке сохраняется. Ввиду симметрии делимость сохраняется и при сдвиге влево.

**3.** 100.

После замены $x = 100u$ уравнения примут вид: $y = \cos 100u$, $u = \cos 100y$. Ординаты соответствующих точек пересечения новых кривых будут те же, а абсциссы уменьшатся в 100 раз. Пусть $c$ – сумма абсцис новых точек пересечения (с положительными координатами). Новые кривые, а значит, и точки их пересечения симметричны относительно прямой $y = u$. Поэтому $c = b$, а $a = 100b$.

**4.** Обозначим через $\Omega_1$ и $\Omega_2$ касающиеся окружности, содержащие соответственно хорды $AB$ и $CD$, а через $\Omega$ – описанную окружность четырехугольника $ABCD$. Пусть $O$ – точка пересечения прямых $AB$ и $CD$. Заметим, что точка $O$ лежит вне всех трех окружностей. Докажем, что точка $O$ лежит на общей касательной окружностей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, проходящей через точку $X$.

Пусть это не так, тогда луч $OX$ второй раз пересекает $\Omega_1$ в точке $Y$, а $\Omega_2$ – в отличной от нее точке $Z$. Имеем $OX \cdot OY = OA \cdot OB = OC \cdot OD = OX \cdot OZ$. Значит, $OY = OZ$. Противоречие.

Из доказанного следует, что длина касательной $OX$ равна $\sqrt{OA \cdot OB}$, т.е. точка $X$ лежит на окружности с центром $O$ и радиусом $\sqrt{OA \cdot OB}$.

*Замечание для знатоков.* Можно сразу заметить, что *радикальные оси* пар окружностей $\Omega_1$ и $\Omega$ (прямая $AB$), $\Omega_2$ и $\Omega$ (прямая $CD$), $\Omega_1$ и $\Omega_2$ (общая касательная) пересекаются в *радикальном центре* трех окружностей.

**5.** Второй игрок.

*Указание.* Если бы ладьи изначально стояли на центрально-симметричных клетках, то второй мог выиграть, каждым ответным ходом восстанавливая центральную симметрию. Давайте мысленно поменяем местами вертикаль b с f, а 2-ю горизонталь с 5-й. Ход, возможный на одной доске, остался возможным и на другой, и наоборот, но теперь уже можно играть «по симметрии»!

*Сложный вариант*

*8–9 классы*

**1.** Разложим груши по возрастанию масс и докажем, что соседние массы будут отличаться не больше чем на 1 г. Пусть это не так: есть груша массы $a$, а следующая масса больше $a+1$. Покрасим груши с массой не больше $a$ в зеленый цвет, а груши с массой больше $a+1$ – в желтый. В исходной расстановке где-то груши разного цвета лежат рядом, значит, разность их масс меньше 1. Противоречие.

В первый пакет положим первую грушу с последней, во второй – вторую с предпоследней и т.д. На каждом шаге добавляются два изменения масс разных знаков, что в сумме делает разность соседних пакетов по модулю не больше максимума разностей груш, т.е. не более 1 г.

**3.** Не может.

Занумеруем сторожей в порядке убывания разряда. У сторожей жизнь делится на равные периоды сна и дежурства. При этом у каждого сторожа периоды, как минимум, втрое короче, чем у предыдущего; поэтому любой период предыдущего делится, как минимум, на три части периодами следующего, причем как минимум две из этих частей будут целыми периодами следующего. Следовательно, период сна предыдущего содержит целый период сна следующего. Так продолжая, найдем вложенный друг в друга набор периодов снов всех сторожей. В день, входящий в самый маленький из вложенных периодов сна, никто не дежурит.

**5.** Наборы видов $(pm, m, \ldots, m)$ и $(m, m, \ldots, m)$, где $m$ – натуральное число.

Пусть $S$ – сумма всех чисел интересного набора, $c$ – наибольшее число, $a$ и $b$ – еще два каких-то числа из набора. Суммы $S-a-c$ и $S-b-c$ делятся на $c$, значит, и их разность $b-a$ кратна $c$. Поскольку эта разность по модулю меньше $c$, то она нулевая. Итак, все числа набора, кроме наибольшего числа $c$, равны $a$. $S-a-a = (p-1)a + c$ делится на $a$, следовательно, $c = ka$. $S-a-c = pa$ делится на $c$, что равносильно делимости $p$ на $k$. Итак, $k = 1$ или $k = p$.

**6.** При $N = 3$.

Это нетрудно сделать при $N = 3$. Так как любая комбинация из первых трех цифр встречается ровно по 1000 раз, то посмотрев эти цифры у всех, кроме Корейко, Бендер будет знать их и у Корейко. Далее достаточно посмотреть три последние цифры у Корейко.

Докажем, что при $N < 3$ нельзя гарантированно узнать код Корейко $K$. Для каждой из 6 позиций выберем код, который от $K$ отличается только в этой позиции. Соответствующую цифру в выбранном коде назовем *плохой*. Пусть Бендеру не повезло, и при первой же проверке *не Корейко* ему попался выбранный код, причем плохую цифру он не проверил (есть 4 непроверенных позиции, мог попасться код с плохой цифрой на одной из этих позиций). Пусть то же случилось при второй и третьей проверках не Корейко (есть 4 непроверенных позиции, из 4 выбранных кодов с плохой цифрой на этих местах ранее проверено не более двух, значит, такой код мог попасться). Когда все коды проверены, посмотрим, какие $N < 3$ позиций проверены в коде $K$. Из 4 непроверенных в нем позиций хотя бы одна совпадает с позицией плохой цифры в одном из трех проверенных выбранных кодов – кода $L$. Но если поменять местами $L$ и $K$, то результаты всех проверок не изменятся. Значит, Бендер не сможет отличить $L$ от $K$.

**7.** $30°$.

Заметим, что $\angle IAC = \angle IAH + \angle HAC = 45°$. Поскольку точка $I$ лежит на биссектрисе угла $B$, $AIC$ – равнобедренный прямоугольный треугольник.

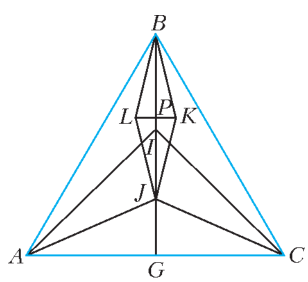


Рис. 2

Пусть вписанная окружность треугольника $ABI$ касается стороны $BI$ в точке $P$. Очевидно, $P$ – середина отрезка $KL$ (рис. 2). Докажем, что $P$ – также середина отрезка $BJ$. Отсюда следует, что $BKJL$ – ромб и $\angle KJL = \angle KBL = 30°$.

Пусть $AB = 2$, тогда $AI = \sqrt{2}$, а высота $BG$ треугольника $ABC$ равна $\sqrt{3}$. Как известно, $BP = \frac{1}{2}(AB + BI - AI) =$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \left(\sqrt{3} - 1\right) - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$

Радиус $JG$ вписанной в прямоугольный треугольник $AIC$ окружности равен $\frac{1}{2}(AI + CI - AC) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - 2\right) = \sqrt{2} - 1$, поэтому $BJ = BG - JG = \sqrt{3} - \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2BP$, что и требовалось.

### 10—11 классы

**3.** Достаточно рассматривать только остатки при делении на $2n - 1$, расположим их по кругу обычным образом. Так как равны квадраты остатков, симметричных относительно нуля, то для $x^2$ возможно максимум $n$ различных остатков. Выберем любые два из них. Поскольку какое-то из двух расстояний между ними по циклу четное, то можно подобрать сдвиг на $a_1$, чтобы они стали симметричными. Тогда после второго возведения в квадрат останется не более $n - 1$ различных остатков. Действуя таким образом, после $n$-го возведения в квадрат оставим не более одного остатка, сдвинем его в нуль с помощью $a_n$.

**4.** Спроектируем четыре отрезка, соединяющие точки, лежащие на боковых гранях, на нижнюю грань куба. При этом длины отрезков не увеличатся. Мы получили четырехугольник, вписанный в единичный квадрат. Докажем, что его периметр не меньше $2\sqrt{2}$.

Проекция отрезка отсекает от квадрата прямоугольный треугольник и служит его гипотенузой. Из неравенства $2\left(a^2 + b^2\right) \geq (a + b)^2$ следует, что длина гипотенузы не меньше полусуммы катетов, умноженной на $\sqrt{2}$. Поэтому сумма длин четырех этих проекций не меньше полупериметра грани, умноженного на $\sqrt{2}$, т.е. не меньше $2\sqrt{2}$.

Аналогично оцениваются суммы длин еще двух четверок отрезков.

**5.** Пусть $\delta$ – угол, на который надо повернуть $l$ против часовой стрелки, чтобы она стала параллельна $AB$. Тогда по симметрии $l_b$ переходит в прямую, параллельную $BC$, при повороте на угол $-\delta$, а $l_a$ переходит в прямую, параллельную $AC$, при повороте на $-\delta$. Следовательно, угол между $l_a$ и $l_b$ равен углу $C$ треугольника $ABC$, т.е. построенный нами треугольник подобен треугольнику $ABC$.

**Лемма.** *Пусть прямая k проходит через ортоцентр H треугольника XYZ. Тогда прямые, симметричные k относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.*

**Доказательство.** Воспользуемся известным фактом: *точки, симметричные ортоцентру треугольника, лежат на его описанной окружности*, и применим его к точкам $H_x$, $H_y$, $H_z$, симметричным ортоцентру $H$ треугольника $XYZ$ относительно сторон $YZ$, $ZX$, $XY$.

Угол, опирающийся на дугу $H_xH_y$, равен углу между прямыми $k_x$ и $k_y$, симметричными $k$ относительно соответствующих сторон. Значит, $k_y$ проходит через $H_y$, $k_x$ проходит через $H_x$, и эти прямые пересекаются на описанной окружности. Аналогично, $k_z$ и $k_x$ пересекаются на описанной окружности треугольника. Лемма доказана.

Центр $I$ вписанной окружности треугольника $ABC$ является ортоцентром треугольника, образованного внешними биссектрисами. Применяя утверждение к этому треугольнику и прямой $l'$, проходящей через $I$ и параллельной $l$, получаем, что прямые, симметричные $l'$ относительно биссектрис, пересекаются в одной точке. Тогда прямые $l_a$, $l_b$, $l_c$ удалены от этой точки на расстояние, равное радиусу $r$ вписанной в треугольник $ABC$ окружности, т.е. у образованного ими треугольника радиус вписанной окружности тоже равен $r$. А поскольку треугольник, образованный внешними биссектрисами, остроугольный, то $r$ будет радиусом именно вписанной, а не вневписанной окружности.

**7.** Будем называть кучки с 1, 2, 3, 4 камешками соответственно единичка, двойка, тройка, четверка.

а) Дождемся, когда станет 70 кучек. Среди них найдется 40 единичек (в противном случае в кучках не менее $39 + 2 \cdot 31 = 101$ камешков). Если их отбросить, то останется 30 кучек, содержащих 60 камней.

б) Докажем индукцией по $a$ **лемму**: *при* $a = 20, 19, \ldots, 3, 2$ *в некоторый момент найдется* $60 + 2a$ *камней в* $20 + a$ *кучках.*

*База*, $a = 20$: после 39-го хода есть 100 камней в 40 кучках.

*Шаг индукции*: Пусть $a > 2$, и мы нашли $60 + 2a$ камней в $20 + a$ кучках. Среди этих кучек найдется двойка или две единички, поскольку $3(19 + a) + 1 > 60 + 2a$. Отбросим их, а во втором случае еще дождемся, когда Костя разобьет одну из оставшихся кучек на две. В результате число кучек уменьшится на 1, а количество камней в них – на 2, то есть мы доказали аналогичное утверждение для $a - 1$. Лемма доказана.

При $a = 2$ по лемме найдем 64 камня в 22 кучках.

Покажем, что мы можем набрать из них сейчас 4 камня двумя или более кучками. Пусть это не так. Если среди куч есть единичка, то камней хотя бы $1 + 1 + 1 + 4 \cdot 19 > 64$, а если нет, то камней хотя бы $2 + 3 \cdot 21 > 64$. Противоречие.

Отбросив эти 4 камня, мы получим 60 камней в 20 или менее кучках. Осталось дождаться, когда кучек станет ровно 20.

в) Пусть Костя отделяет от самой большой кучи по тройке, пока не останется четверка. До сих пор была одна куча, где число камешков не делилось на 3. Сумма в любых 19 кучках с ее участием не делилась на 3, а без нее не превосходила 57, т.е. ни так, ни этак не равнялась 60. Затем Костя делит четверку на две двойки. Теперь и в дальнейшем каждая кучка не больше тройки, т.е. в любых 19 кучках не больше 57 камней.

### Устный тур для 11 класса

**2.** Введем прямоугольную систему координат следующим образом. Ее начало – это центр верхнего основания цилиндра, ось $Ox$ – проекция направления лучей на это основание, а ось $Oy$ тоже лежит в основании. Тогда ось $Oz$ совпадает с осью цилиндра. Пусть лучи составляют с $Oz$ угол $\alpha$. Очевидно, граница тени – это проекция границы колодца на его боковую поверхность вдоль направляющего вектора лучей.

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью $y = c$, параллельной лучам. Пусть $A_\pm = (\pm d, c, 0)$ – точки его пересечения с окружностью верхнего основания. Тогда граничной точкой тени в этой плоскости будет такая точка $B$, что $\angle A_-A_+B$ прямой, и $\angle A_-BA_+ = \alpha$. Отсюда получаем $B = (d, c, -2d\operatorname{ctg}\alpha)$.

Все такие точки $B$ лежат, очевидно, в плоскости $z = -2x\operatorname{ctg}\alpha$, откуда и следует требуемое.

**3.** $D = 5$.

Если $D = 5$, то полицейские располагаются так, чтобы их центры лежали, скажем, на «горизонтальном» диаметре круга на расстояниях 1 м от центра круга. Тогда на этом диаметре есть три «дырки» ширины 1 м, через которые преступник проскочить не может. Далее полицейские синхронно поднимаются вверх, пока не коснутся границы круга, далее синхронно сближаются, касаясь этой границы. В какой-то момент либо преступник будет пойман, либо полицейские коснутся друг друга. Во втором случае они совершают обратное движение и, двигаясь аналогично в «нижней» части круга, ловят преступника.

Если $D < 5$, то стратегия такая же, либо проще.

Пусть $D > 5$. Докажем, что преступник сможет убежать. Мысленно «раздуем» наших полицейских до кругов диаметра 2, а преступника превратим в точку. Тогда можно считать, что полицейские передвигаются в круге диаметра $D + 1$ (и могут даже «налезать» друг на друга), а преступник – в концентрическом круге диаметра $D - 1$, назовем этот круг малым. По условию, $D - 1 > 4$.

В каждый момент времени будем рассматривать хорду малого круга, проходящую через центры полицейских. Она делит малый круг на две части. Пусть вначале преступник находился в большей из частей. Пусть $h$ – расстояние от хорды до

центра круга. Выберем число $a \in (0;1)$ такое, что если $h \le a$, то длина хорды больше 4. Ясно, что такое $a$ найдется.
Теперь опишем стратегию преступника. Пока он в большей части, он должен находиться в середине граничной дуги этой части (назовем это стандартным положением). Если часть становится меньшей, преступник должен придерживаться той же стратегии до момента, пока $h$ не станет равным $a$. При этом расстояние от преступника до хорды будет все время больше 1, так что он не коснется ни одного полицейского.
В момент, когда $h$ станет равным $a$, преступник должен «мгновенно» переместиться в бóльшую часть, заняв в ней стандартное положение. Это будет возможно, так как проекции полицейских на хорду – один или два отрезка суммарной длины не больше 4 м, а значит, на хорде найдется «дыра» – свободный отрезок ненулевой длины. Точечный преступник сможет проскочить в бóльшую часть через эту дыру.

**5.** Пусть $K_1$, $K_2$ – середины $A_1C_1$ и $A_2C_2$, $L_1$, $L_2$ – середины $A_1B_1$ и $A_2B_2$, $I$, $I_A$ – центры вписанной и вневписанной окружностей, а $A_1'$, $A_2'$ – диаметрально противоположные точки для $A_1$, $A_2$ на этих окружностях.
Заметим, что прямая $BI$ параллельна $C_2A_2$ (они перпендикулярны $BI_A$), прямая $CI$ параллельна $B_2A_2$ (они перпендикулярны $CI_A$), прямая $K_1L_1$ параллельна $K_2L_2$ (каждая из них параллельна $B_1C_1$ и $B_2C_2$ соответственно как средняя линия, а последние прямые параллельны в силу равнобедренности треугольников $C_1AB_1$ и $C_2AB_2$). Значит, треугольники $K_1L_1I$ и $K_2L_2A_2$, образованные данными прямыми, гомотетичны, откуда прямые $K_1K_2$, $L_1L_2$ и $IA_2$ пересекаются в одной точке.
Аналогичным образом получаем, что треугольники $K_1L_1A_1$ и $K_2L_2I_A$ гомотетичны, откуда прямые $K_1K_2$, $L_1L_2$ и $A_1I_A$ пересекаются в одной точке. Значит, все четыре прямые $K_1K_2$, $L_1L_2$, $IA_2$ и $A_1I_A$ пересекаются в одной точке, т.е. достаточно рассмотреть точку пересечения последних двух прямых.
Поскольку вписанная и вневписанная окружности гомотетичны с центром в $A$, то при этой гомотетии точка $A_1'$ переходит в $A_2$, а точка $A_1$ – в $A_2'$. Так как $A_2I$ является медианой в треугольнике $A_2A_1A_2'$, то она является и медианой в подобном треугольнике $A_2HA$. Отсюда получаем, что $A_2I$ проходит через середину высоты $AH$. Аналогично, рассматривая медиану $A_1I_A$ в треугольнике $A_1A_2A_2'$, получаем, что она тоже проходит через середину $AH$.

**6.** Назовем *осью симметрии* многочлена вертикальную ось симметрии его графика. Заметим, что если $x = a$ является осью симметрии многочлена $R(x)$, то она является осью симметрии и любого многочлена вида $Q(R(x))$.
Предположим, что $f$ и $h$ не совпадают. Поскольку $f$ и $h$ – приведенные квадратные трехчлены с пересекающимися графиками, у них разные оси симметрии. Значит, у многочлена $T(x) = f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ есть две различные оси симметрии. Но этого, очевидно, не может быть, так как иначе график $T$ имел бы пересечение с какой-то горизонтальной прямой в бесконечном числе точек, и значит, совпадал бы с этой прямой, но степень $T$ больше нуля.

## LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМИПИАДА

### *6 класс*

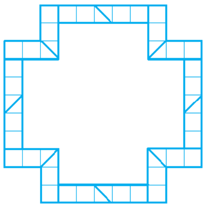


*Рис. 3*

**1.** Разрезать можно так, как показано на рисунке 3.

**5.** Максимальное количество «кусков» равно семи, например: ПИРОГ = 95207, КУСОК = 13601.
Перепишем условие как пример на умножение: ПИРОГ = КУСОК$\cdot n$, где $n$ – количество «кусков». Если «кусков» 10 или больше, то правая часть превысит 100000.
Невозможно решение и для девяти «кусков»: если число ПИРОГ = КУСОК$\cdot$9 пятизначное, то К = 1. Но тогда ПИРОГ и начинается, и кончается на девятку.
Пусть КУСОК$\cdot$8 = ПИРОГ. Так как в слове ПИРОГ все буквы разные, то ПИРОГ $\le$ 98765, а тогда КУСОК $\le$ $\le 98765/8 = 12345{,}675$, т.е. КУСОК $\le$ 12345. Значит, К = 1 и Г = 8. Буква О обозначает цифру, произведение которой на 8 оканчивается на нее же. Это может быть только ноль. Поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а У $\le$ 2 и С $\le$ 3, то У = 2 и С = 3. Значит, КУСОК = 12301. Но это число не подходит, так как $12301 \cdot 8 = 98408$, а в 98408 цифры повторяются.

**6.** Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

### *7 класс*

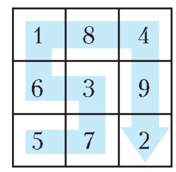


*Рис. 4*

**1.** Наибольшее число, которое можно получить, это 573618492 (рис. 4).

**4.** Либо за 24, либо за 72 минуты.

**5.** «В этой фразе $1/2$ всех цифр – цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны $1/5$, а доля всех остальных цифр составляет $1/10$» (или «...доли цифр 0 и 2 одинаковы...» или «...доли цифр 0 и 5 одинаковы...»).

### *8 класс*

**1.** Например, 2012 = 353 + 553 + 553 + 553.

**2.** 8 прыжков.
За 8 прыжков кузнечик может посетить все отмеченные точки, если пройдет по маршруту $FABGQEDCH$, где $Q$ – вершина равнобедренного треугольника с основанием $GE$ и стороной 5 (рис. 5).

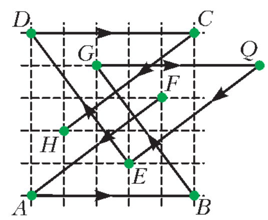


*Рис. 5*

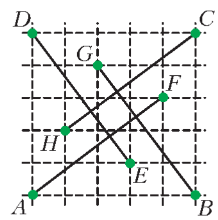


*Рис. 6*

Чтобы за семь или меньше прыжков посетить все восемь отмеченных точек, он должен начать в одной из отмеченных точек и каждым прыжком попадать в новую отмеченную точку. Но на расстоянии 5 от каждой из точек $E$, $F$, $G$, $H$ есть только одна отмеченная точка (рис. 6), а хотя бы одна из этих точек не является ни начальной, ни конечной – противоречие.

**4.** Пусть $L$ – середина отрезка $CD$ тогда $ML \perp CD$, так как $ML$ – медиана равнобедренного треугольника $CMD$. В треугольнике $KLB$ имеем $LM \perp BK$, так как $BK \parallel CD$, и $BM \perp KL$, так как $KL \parallel AD$. Значит, $M$ – ортоцентр треугольника $KLB$, т.е. $KM \perp BL$. Но $BL \parallel KD$, поэтому $KM \perp KD$.

**5.** Приведем дроби $x$, $y$, $z$ к виду с наименьшим общим знаменателем: $x = \frac{a}{D}$, $y = \frac{b}{D}$, $z = \frac{c}{D}$. Тогда $\text{НОД}(a,b,c,D) = 1$.
Число $x^2 + y^2 + z = \frac{a^2 + b^2 + cD}{D^2}$ целое, поэтому $a^2 + b^2$ делится на $D$. Аналогично, на $D$ делятся $b^2 + c^2$ и $a^2 + c^2$. Поэтому $2c^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)$ также делится на $D$. Аналогично, $2a^2 \vdots D$, $2b^2 \vdots D$.
Если у $D$ есть простой делитель $p > 2$, то из делимости $2a^2$ на $D$ следует, что $a$ делится на $p$; то же верно для $b$ и $c$, и $\text{НОД}(a,b,c,D) \ge p > 1$ – противоречие. Значит, $D$ – степень двойки. Если $D \vdots 4$, то $a,b,c \vdots 2$ – снова противоречие. Зна-

чит, $D = 1$ или $D = 2$. Поэтому $2x = \dfrac{2a}{D}$ – целое.

**6.** Для любых.

Если в клетке стоит единица, то ровно в одной из соседних написана единица. Значит, единицы образуют прямоугольники $1\times 2$. При этом никакие два таких прямоугольника не граничат по стороне и не пересекаются.

Клетка, не принадлежащая таким прямоугольникам, не может граничить ровно с одним прямоугольником.

Пусть в таблице $m\times n$ прямоугольники $1\times 2$ расположены так, что 1) они не граничат по стороне и не пересекаются; 2) если клетка не принадлежит ни одному из этих прямоугольников, то она граничит *не* с одним прямоугольником. Тогда в прямоугольники можно поставить единицы, а во все остальные клетки – количество соседних с ними единиц. Если $m$ и $n$ дают остаток 1 при делении на 3, прямоугольники можно расположить так, как изображено на рисунке 7.

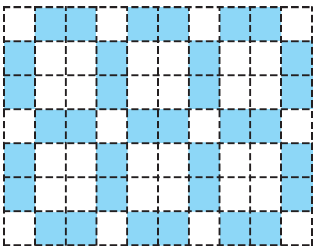


*Рис. 7. Прямоугольники 1×2 в таблице (3k + 1)×(3l + 1)*

Добавляя подходящие полоски ширины 5, мы сможем заполнить любые таблицы $m\times n$, где $m, n > 14$.

## 9 класс

**1.** 6 провинций.

Упорядочим провинции по возрастанию населения. Как в первой, так и во второй провинции живет не больше 7% населения. Тогда в третьей живет меньше 14%, в четвертой – меньше 21%, в пятой – меньше 35%. Значит, в первых пяти провинциях живет меньше 84% населения страны Далекой.

Пример с 6 провинциями: в них может жить 7%, 7%, 11%, 16%, 25%, 34% населения.

**6.** а) 74; б) $n - 1$, если $n > 3$; 3, если $n = 2$ или $n = 3$.

Обсудим решение пункта б), так как пункт а) – его частный случай.

Если в турнире участвуют две или три команды, то минимальный разрыв будет составлять три очка.

В случае $n > 3$ команд разрыв между первым и последним местом не меньше $n - 1$. Докажем это по индукции.

Существует турнир 4 команд с минимальным разрывом 3 очка. Именно, пусть первая команда выиграла у второй, вторая у четвертой, а остальные встречи закончились вничью.

Пусть при некотором $n > 3$ можно построить таблицу, в которой первому месту соответствует $2n - 3$ очка, а последнему – $n - 2$ очка. Покажем, как это сделать для $n + 1$.

Разобьем команды на тройки по количеству набранных очков: первая тройка – команды с $2n - 3$, $2n - 4$, $2n - 5$ очками, и т.д. Добавим еще одну команду.

При $n = 3k + 1$ пусть новая команда выигрывает у первой команды и проигрывает второй и третьей, и аналогично с другими тройками. Команда, занимавшая последнее место, пусть сыграет с новой командой вничью.

При $n = 3k + 2$ пусть команды из $k$ троек играют с новой командой аналогично предыдущему случаю. Команда, занимавшая последнее место, выигрывает у новой команды, а предпоследняя играет с ней вничью.

При $n = 3k$ новая команда аналогично играет с первыми $k - 1$ тройками, у нее будет $n - 3$ очка. У последних трех команд будет $n$, $n - 1$, $n - 2$ очков соответственно. Команда с $n - 1$ очками выигрывает у новой, команда с $n$ очками проигрывает, команда с $n - 2$ очками играет с ней вничью. Тогда у новой команды будет $n + 1$ очко. Отсюда следует утверждение индукции.

## 10 класс

**1.** –30.

Пусть трехчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, а его корни равны $m$ и $n$. По теореме Виета $c = amn$. Поэтому одно из пяти чисел на доске делилось по крайней мере на три других числа.

На доске осталась лишь одна пара чисел, одно из которых делится на другое: 2 и 4. Значит, было стерто число $c$.

Применив еще раз теорему Виета, получим $b = -a(m+n)$, а значит, $b$ делится на $a$. Поэтому $a = 2$, $b = 4$, числа 3 и –5 – корни, а $c = amn = 2\cdot 3\cdot(-5) = -30$.

**3.** Можно. Пример приведен на рисунке 8.

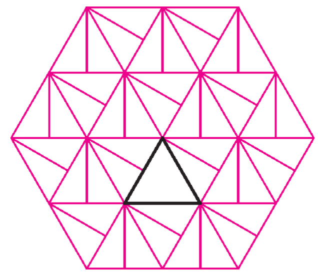


*Рис. 8*

**4.** Отметим груши $X$ и $Y$ с самой маленькой и с самой большой массами. Отсортируем груши по массе: по часовой стрелке от $X$ до $Y$ и отдельно – против часовой стрелки от $X$ до $Y$. Тогда массы любых двух соседних по-прежнему отличаются не более чем на 1 г.

Расположим груши в один ряд по возрастанию массы. Рассмотрим произвольную грушу $Z$ из этого ряда, отличную от $Y$. Если есть хотя бы две груши тяжелее $Z$, то обязательно найдутся как минимум две груши, которые тяжелее $Z$ не более чем на 1 г: одна из них была соседней с $Z$ после сортировки, вторая будет соседней с $Z$, если перенести $Z$ в другую часть круга.

Выложим по часовой стрелке от $X$ до $Y$ груши с нечетных мест ряда по возрастанию массы, а против часовой стрелки от $X$ до $Y$ – остальные груши. Условие про массы двух соседних груш сохранилось в силу доказанного. Теперь мы получим требуемое, если, начиная с груши $X$ и идя против часовой стрелки, будем класть грушу в пакет вместе с противоположной и выкладывать эти пакеты последовательно по кругу.

**6.** $\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Обозначим наш граф $G = (V, E)$, где $V$ – его вершины, а $E$ – ребра. Минимальное число цветов $\chi(G)$, в которые можно правильно раскрасить вершины, называется *хроматическим числом графа*.

Обозначим через $\alpha(G)$ размер одного из самых больших множеств вершин графа, которые попарно не соединены ребрами. Легко понять, что $\chi(G) \ge \dfrac{|V|}{\alpha(G)} = \dfrac{C_n^3}{\alpha(G)} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6\alpha(G)}$. Остается проверить, что $\alpha(G) \le n$.

Пусть даны вершины $M_1, \ldots, M_s$, которые попарно не соединены ребрами. Заменим их векторами $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$ с координатами 0 и 1: $i$-я координата вектора $\vec{x}_j$ равна 1, если $i \in M_j$, и равна 0 в противном случае. Тогда условие $|M_i \cap M_j| \ne 1$ равносильно условию $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \ne 1$. Нетрудно видеть, что векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$ с указанным свойством линейно независимы. Значит, их не больше $n$.

## 11 класс, первый день

**2.** Графики функций $y = 2a + \dfrac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \dfrac{1}{x-d}$ центрально симметричны относительно точки с координатами $\left(\dfrac{b+d}{2}, a+c\right)$ и, следовательно, имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда $2a + \dfrac{1}{x-b} = 2c + \dfrac{1}{x-d} = a + c$ при $x = \dfrac{b+d}{2}$. Это условие эквивалентно равенству $(a-c)(b-d) = 2$.

Но аналогичное верно и для второй пары графиков.

**3.** Пусть $O$ – центр описанной окружности треугольника $ABC$. Если $\angle C = 90^\circ$, то $H$ совпадает с $C$ и $AB = 2R$. Тогда $AH + BH = AC + BC > AB = 2R$ по неравенству треугольника. Если $\angle C < 90^\circ$, то треугольник остроугольный, а точки $O$ и $H$ лежат внутри него. Покажем, что точка $O$ находится внутри или на границе треугольника $AHB$. Действительно, $\angle AOB = 2\angle C$, $\angle HAB = 90^\circ - \angle B \geq 90^\circ - \angle C = \angle OAB$, аналогично, $\angle HBA \geq \angle OBA$, и, следовательно, лучи $AO$ и $BO$ пересекаются внутри или на границе треугольника $ABC$.
Пусть $P$ – точка пересечения луча $AO$ с отрезком $BH$. Тогда $AH + HP \geq AP$ и $OP + PB \geq BO$, откуда $AH + HP + OP + PB \geq AP + BO$ и $AH + BH = AH + HP + PB \geq AP + BO - OP = AO + BO = 2R$.
Аналогично разбирается случай, когда $\angle C > 90^\circ$.

**4.** а) Пусть А – один из пришедших на собрание людей, $k$ – количество его знакомых. Из них можно составить $\frac{k(k-1)}{2}$ пар. Каждой паре сопоставим ее второго общего знакомого. Так как у него ровно два общих знакомых с А, то он не может быть сопоставлен другой паре знакомых А. Но каждый из пришедших на собрание, кроме самого А, имеет с ним ровно двух общих знакомых и, значит, был сопоставлен какой-либо паре. Отсюда $\frac{k(k-1)}{2} = n - 1$. Для данного $n$ может существовать только одно такое натуральное $k$.
б) Пусть $n = 16$. Присвоим каждому из 16 человек индивидуальный номер, состоящий из двух необязательно различных цифр $k$ и $l$ из набора $\{1,2,3,4\}$. Будем считать, что человек с номером $kl$ знаком с человеком, номер которого $mp$, тогда и только тогда, когда либо $k = m$, либо $l = p$. Тогда любые два человека имеют ровно двух общих знакомых.

**5.** Пусть $a_1$, $a_2$, $a_3$, … – неубывающая последовательность натуральных чисел. Для $k \geq 2$ положим $S_k = a_1 + \ldots + a_{k-1}$, и пусть $S_1 = 0$.
**Утверждение**: *чтобы любое натуральное число представлялось в виде суммы различных членов последовательности $\{a_k\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого $k$ неравенства $a_k \leq S_k + 1$.*
Доказать это можно по индукции.
Применим утверждение к последовательности $\{a_k\}$, состоящей из членов геометрических прогрессий 1, 3, $3^2$, $3^3$, …, 1, 4, $4^2$, $4^3$, … и 1, 5, $5^2$, $5^3$, …, расположенных в порядке неубывания.
Неравенство из условия леммы для $k$ = 1, 2, 3, выполнено.
Пусть для $k > 3$ сумма $S_k$ состоит ровно из $n$ членов первой геометрической прогрессии, из $m$ – второй и из $l = k - 1 - n - m$ – третьей. Тогда следующее число последовательности $a_k$ равно минимальному из чисел $3^n, 4^m, 5^l$. Имеем

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} 3^j + \sum_{j=0}^{m-1} 4^j + \sum_{j=0}^{l-1} 5^j = \frac{3^n - 1}{2} + \frac{4^m - 1}{3} + \frac{5^l - 1}{4} \geq$$

$$\geq \left(\min\left(3^n, 4^m, 5^l\right) - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \min\left(3^n, 4^m, 5^l\right) - 1 = a_k - 1.$$

*11 класс, второй день*

**1.** 19.
Пусть исходная последовательность имела вид $n+1$, $n+2$, … …, $n+m$, а после приписывания справа двух цифр к каждому члену получилась последовательность $(l+1)^2$, $(l+2)^2$, … …, $(l+m)^2$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ выполнены неравенства $100(n+k) \leq (l+k)^2 \leq 100(n+k) + 99$. Прибавим к каждой из частей выражение $50^2 - 100(l+k)$, воспользуемся равенством $(l+k)^2 - 100(l+k) + 50^2 = (k+l-50)^2$ и положим $p = 50^2 + 100(n-l)$. Полученные неравенства при $p \geq 1$ приводятся к виду $\sqrt{p} \leq |k + l - 50| \leq \sqrt{p+99}$, и значения всех выражений $k + l - 50$ при $k$ = 1, 2, …, $m$ принадлежат либо отрезку $\left[-\sqrt{p+99}; -\sqrt{p}\right]$, либо отрезку $\left[\sqrt{p}; \sqrt{p+99}\right]$. Каждый из этих отрезков содержит не более $\sqrt{p+99} - \sqrt{p} + 1$ целых чисел. Следовательно, при таких $p$ получаем $m \leq \sqrt{p+99} - \sqrt{p} + 1 = \frac{99}{\sqrt{p+99} + \sqrt{p}} + 1 \leq 10$.
При $p \leq 0$ получаем неравенства $-\sqrt{p+99} \leq |k + l - 50| \leq \sqrt{p+99}$. Тогда значения всех выражений $k + l - 50$ при $k$ = 1, 2, …, $m$ принадлежат отрезку $\left[-\sqrt{p+99}; \sqrt{p+99}\right]$. Этот отрезок содержит нечетное число целых чисел, не превосходящее $2\sqrt{p+99} + 1 < 21$. Следовательно, при таких $p$ получаем $m \leq 19$.
Примером требуемой последовательности из 19 членов являются числа 16, 17, …, 34, которые после приписывания справа двух цифр преобразуются в последовательность $1681 = 41^2$, $1764 = 42^2$, …, $3481 = 59^2$.

**2.** Да.
Так как каждый из пяти прожекторов испускает лазерный луч под одним из двух острых углов $\alpha$ или $\beta$ к площадке, то найдутся по крайней мере три прожектора, которые испускают луч под одним и тем же углом, скажем $\alpha$.
Пусть эти три прожектора, расположенные в точках $A$, $B$ и $C$, повернуты так, что их лучи пересеклись в одной точке $D$. Пусть $H$ – основание перпендикуляра из $D$ к плоскости $ABC$. Треугольники $ADH$, $BDH$ и $CDH$ равны по общему катету $DH$ и острому углу $\alpha$. Следовательно, $AH = BH = CH$, точка $H$ является центром описанной окружности треугольника $ABC$ и $DH = AH \operatorname{tg}\alpha$. Значит, в полупространстве над горизонтальной площадкой существует лишь одна точка, в которой могут пересечься лучи этих трех прожекторов.
Рассмотрим прожектор, отличный от этих трех. По условию все четыре прожектора можно повернуть так, чтобы их лучи пересекались в одной точке, а это может быть лишь точка $D$. Таким же образом можно повернуть и пятый прожектор.

**3.** При $n = 1$ на доске после действий учителя останутся $x$ и $(1-x)$, и утверждение задачи выполнено.
Пусть для некоторого $n$ утверждение задачи верно, и пусть учитель сложил первые $k$ полученных выражений $\left(2 \leq k \leq 2^{n+1}\right)$. После проделанных им операций получится многочлен вида

$$x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot (1-x) + x \cdot x \cdot \ldots \cdot (1-x) \cdot x + \ldots$$

Если $k \leq 2^n$, то первый множитель в каждом из этих $k$ слагаемых равен $x$. Вынеся его за скобку, получим в скобках сумму, в которой каждое слагаемое является произведением $n$ множителей вида $x$ и $(1-x)$. По предположению индукции, эта сумма – постоянная или возрастающая на отрезке $[0;1]$ функция от $x$. Это будет верно и после умножения на $x$.
Если $k = 2^{n+1}$, то учитель сложил все выражения на доске. Получается многочлен, тождественно равный единице.
Если $2^n < k < 2^{n+1}$, то обозначим полученную учителем функцию $f(x)$ и рассмотрим сумму выражений, им не использованных. Она равна $1 - f(x)$. Первый множитель в каждом из слагаемом равен $(1-x)$. Вынесем его за скобку, слагаемые в скобках расположим в обратном порядке и положим $t = 1 - x$. Получаем выражение $t \cdot t \cdot \ldots \cdot t \cdot t + t \cdot t \cdot \ldots \cdot t \cdot (1-t) + t \cdot t \cdot \ldots \cdot (1-t) \cdot t + \ldots$ По предположению индукции, это постоянная или возрастающая на отрезке $[0;1]$ функция от $t$, т.е. от $(1-x)$. После умножения на $(1-x)$ получаем убывающую на отрезке $[0; 1]$ функцию от $x$. Но эта функция равна $1 - f(x)$.

**4.** 2 : 3.

Для каждой точки $P$ скатерти обозначим через $f(P)$, $g(P)$ и $h(P)$ соответственно точки, симметричные ей относительно одной из двух линий, соединяющих середины противоположных сторон скатерти, второй такой линии и той ее диагонали, при перегибе через которую видимая площадь пятен становится равна $S_1$. Пусть $k(P)$ – точка, симметричная точке $P$ относительно второй диагонали скатерти. Тогда $h(k(P))$ и $f(g(P))$ совпадают с точкой, симметричной точке $P$ относительно центра скатерти. Поэтому точки $k(P)$ и $h(f(g(P)))$ также совпадают.

Предположим, что $S_1 < \frac{2S}{3}$. Тогда площадь множества всех точек $Q$, для которых $P = g(Q)$ и $Q$ покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > \frac{2S}{3}$. Аналогично, площадь множества всех точек $Q$, для которых $Q$ и $R = f(Q)$ покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > \frac{2S}{3}$. Тогда площадь множества тех точек $Q$, для которых одновременно выполнены оба условия, должна быть больше чем $\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = \frac{S}{3}$. Значит, и площадь множества всех точек $P$, для которых $P$ и $R = f(Q) = f(g(P))$ покрыты пятнами, больше чем $\frac{S}{3}$.

Аналогично, площадь множества всех точек $P$, для которых $P$ и $T = h(R) = h(f(g(P)))$ покрыты пятнами, больше нуля.

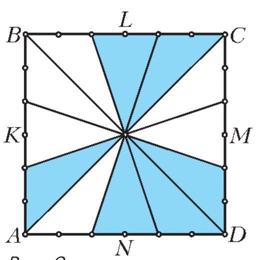


Рис. 9

С другой стороны, $T = h(f(g(P))) = k(P)$. Из условия следует, что площадь множества тех точек $P$, для которых $P$ и $k(P)$ покрыты пятнами, равна 0 – противоречие.

Пример расположения пятен, где $\frac{S_1}{S} = \frac{2}{3}$, показан на рисунке 9. Стороны квадратной скатерти разделены отмеченными на них точками на 6 равных частей.

**5.** а) 324.

Пусть $k$ – простое число и

$$n = n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \ldots + n_p k^p = \left(n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0\right)_k$$

– $k$-ичное представление числа $n$. Покажем, что $S(n,k) = (n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_p+1)$. Из этого факта вытекает ответ в пункте а) и доказательство пункта б).

Скажем, что два многочлена $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ с целыми коэффициентами сравнимы по модулю $k$, если сравнимы по модулю $k$ (т.е. дают одинаковый остаток при делении на $k$) все их коэффициенты при одинаковых степенях. Обозначать это будем так: $P_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)$. Очевидно, что

1) если $P_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)$ и $T_n(t) \overset{(k)}{=} S_n(t)$, то $P_n(t) T_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t) S_n(t)$;

2) если $p$ – простое число, то $C_p^m$ делится на $p$ при любом $m = 1, \ldots, p-1$ и $C_l^m$ не делится на $p$ при любом $l < p$, $m = 0, \ldots, l$.

В дальнейшем $k$ – простое число. Нетрудно показать по индукции, что для любого $m$ выполнено равенство

$$(t+1)^{k^m} \overset{(k)}{=} t^{k^m} + 1.$$

Теперь докажем основное утверждение индукцией по числу разрядов в $k$-ичной записи числа $n$. Если $0 \le n \le k-1$, утверждение очевидно. Пусть оно верно, если $n$ представимо в виде $n = n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \ldots + n_{p-1} k^{p-1}$, $0 \le n_i \le k-1$.

Рассмотрим число $N = n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \ldots + n_{p-1} k^{p-1} + n_p k^p = n + n_p k^p$, $1 \le n_p \le k-1$. Имеем

$$(t+1)^N = (t+1)^n \left((t+1)^{k^p}\right)^{n_p} \overset{(k)}{=} (t+1)^n \left(t^{k^p} + 1\right)^{n_p} = \sum_{j=0}^{n_p} C_{n_p}^j t^{k^p j} (t+1)^n.$$

Ни один из коэффициентов $C_{n_p}^j$ не делится на $k$ и (в силу того, что $n < k^p$) у многочленов $t^{k^p j}(t+1)^n$ при разных $j$ нет одинаковых степеней $t$. Поэтому число коэффициентов многочлена $(t+1)^N$, которые не делятся на $k$, равно числу таких коэффициентов у $(t+1)^n$, умноженному на $n_p + 1$, что и требовалось.

## ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

### ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

*7 класс*

**1.** $t = 120$ с. **2.** $s = 1{,}125$ км.
**3.** Через 1,2 мин или через 6 мин. **4.** $\rho = 8500$ кг/м$^3$.

*8 класс*

**1.** $l = 6$ км. **2.** $l = 30$ см. **3.** $m = 400$ г, $V = 100$ мл.
**4.** Растает не весь лед, уровень воды понизится приблизительно на 4,6 мм.

*9 класс*

**1.** $v_р = 1$ м/с (при малых $x$ приведенный в условии график приближенно совпадает с прямой $y = 2x$), $a = 0{,}02$ м/с$^2$.
**2.** $m_А = 63$ кг, $m_л = 2700$ кг. **3.** $t_В = 8$ мин.
**4.** 12 (после двух последовательных отражений угол между лучом и вертикалью увеличивается на $2\varphi = 14°$).

*10 класс*

**1.** $\beta = \pm\arccos\left(\frac{\mu g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}(a + \mu g)}\right) + \operatorname{arctg}\mu$, $\beta_1 \approx 45°$, $\beta_2 \approx -34°$ (сила направлена вниз под углом к горизонту, но при этом заклинивания бруска не происходит).
**2.** $x_{max} \approx 10$ см. **3.** $F_в = \frac{\rho g V_0}{1 + (\rho g H)/(p_0 - p_н)}$.
**4.** $t_в = t + \frac{10\rho_л (t + \lambda/c_в)}{27\rho_в - 10\rho_л} \approx 70$ °C. **5.** $P = \frac{qU}{t} \approx 43$ мВт.

*11 класс*

**1.** $Q = \frac{32}{7}\nu R T_0 \approx 10{,}6$ кДж (газ получает тепло на линейном участке цикла от точки *1* до точки *3*, в которой объем составляет 5 минимальных объемов, а давление – 3 минимальных давлений).
**2.** $\frac{E}{B} = \frac{v}{\sqrt{2}}$; вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка, вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости рисунка и составляет со скоростью электрона угол $45°$ или $135°$.
**3.** $n > \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

### ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

*8 класс*

**1.** $v_п = 14{,}5$ м/с $= 52{,}2$ км/ч, $l = 100$ м.
**2.** $\eta = 80\%$. **3.** $m = 18$ г. **4.** $t = 24$ с.

*9 класс*

**1.** $a_M = g\frac{M - 3m}{M + 9m}$, $a_m = -3a_M = -3g\frac{M - 3m}{M + 9m}$.

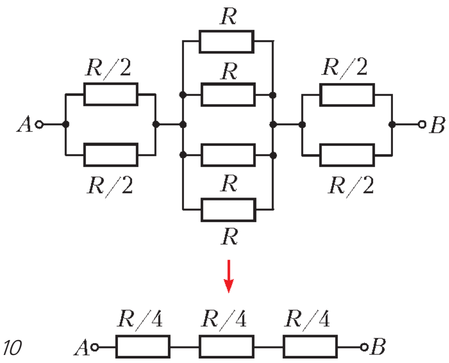



Рис. 10

**2.** $m_1$ – любое (от $m_1$ зависит только «быстрота» вставания игрушки), $m_2 < M\dfrac{r_1}{r_1 + r_2} = 150$ г .

**3.** $R_{\text{общ}} = \dfrac{3}{4}R$ ; см. рис.10.

*10 класс*

**1.** $a = \dfrac{6}{49}g = 1{,}2$ м/с$^2$ .

**2.** $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha_1 \pm \operatorname{tg}\alpha_2)\right)$ (знак «+» соответствует случаю, когда стержни скрепляют так, что их более тяжелые части оказываются с одной стороны, знак «–» соответствует противоположному случаю).

**3.** $R_{\text{общ}} = \dfrac{2}{3}R$ ; см. рис.11.

**4.** $v_{\max} = 2v_0$ при $v_0 < v_1$ и $v_{\max} = v_0 - \sqrt{v_0^2 - v_1^2}$ при $v_0 > v_1$, где $v_1 = \sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 md}}$ ; см. рис.12.

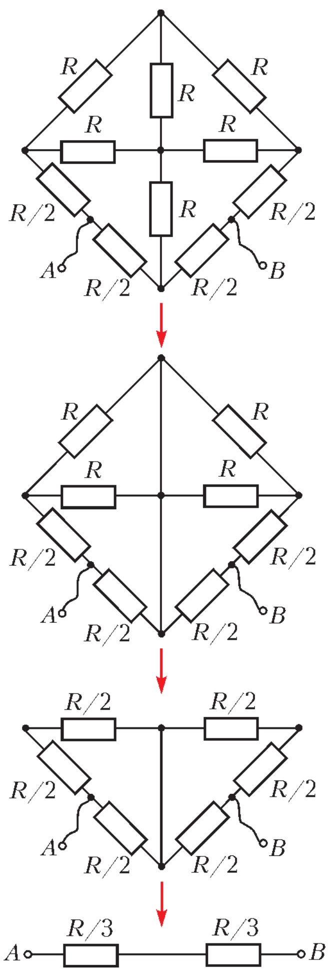



Рис. 11

*11 класс*

**1.** $\alpha = \arccos\left(\dfrac{R}{l}\dfrac{\mu_1\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\right) - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \approx 54{,}6°$ .

**2.** $\nu_{\text{в}} \approx 1{,}87 \pm 0{,}02$ моль, $\nu_{\text{а}} \approx 0{,}97 \pm 0{,}01$ моль (график зависимости давления $p$ в системе от температуры $T$ состоит из двух линейных участков $p = \nu_{\text{а}}RT/V$ и $p = (\nu_{\text{а}} + \nu_{\text{в}})RT/V$ и располагающегося между ними участка графика $p = p_{\text{н}}(T)$, представляющего собой зависимость давления насыщенных паров воды от температуры).

**3.** 1) $X = 31{,}5$ см; 2) $m = 40$ г; 3) $E \approx 18$ мДж ; 4) $T \approx 0{,}84 \pm 0{,}05$ с .

**4.** Эффект связан с тем, что Солнце не является точечным источником света. Форма зайчика повторяет форму зеркальца для каждой из светящихся точек солнечного диска, но все эти изображения накладываются друг на друга, поскольку лучи от разных точек Солнца идут под разными малыми углами в пределах

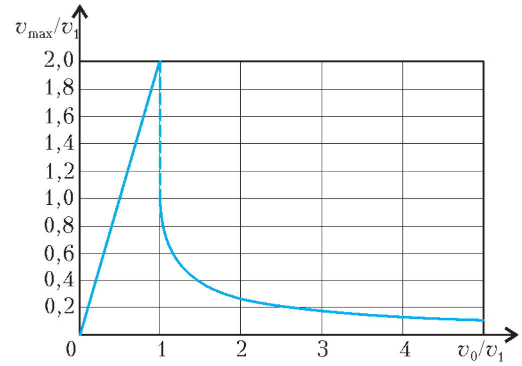



Рис. 12

$0{,}01$ рад $\approx 0{,}5°$ . Пока расстояние от стены до зеркальца мало, размытие краев зайчика, связанное со смещением этих изображений, также невелико: например, в 20 см от стены оно составляет примерно $0{,}01 \cdot 0{,}2$ м $= 0{,}002$ м $= 2$ мм , и форма зайчика похожа на форму зеркальца. В данном случае зайчик был квадратным со стороной $d = 5$ см, значит, зеркальце размером $5 \times 7$ см располагалось под некоторым углом к лучу света. От каждой точки зеркальца в сторону стены идет отраженный конический пучок света с угловой шириной $\varphi \approx 0{,}01$ рад. На большом расстоянии $L$ от стены диаметр $D \approx L\varphi$ светового кружка значительно превышает размеры зеркальца, так что область перекрытия этих кружков на стене становится гораздо больше их смещения $d$ из-за сдвига оснований этих конусов в пределах зеркальца. Таким образом, в результате на стене получается зайчик в виде светлого круга диаметром порядка $D$, окруженный размытым более слабо освещенным кольцом шириной, примерно равной $d$. По условию, $d < 0{,}1D \approx 0{,}1L\varphi$ , откуда $L > \dfrac{d}{0{,}1\varphi} \approx 50$ м .


# КВАНТ

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**
**Тел.: (495) 930-56-48**
**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

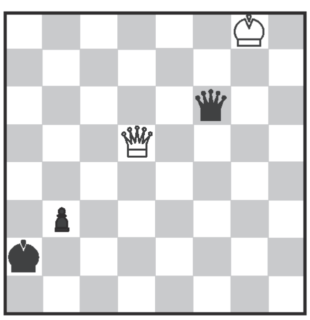
**Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь**
**www.Pareto-print.ru**

# МашинА анализирует

Если в практической игре гроссмейстеры еще способны противостоять компьютеру, то в разыгрывании окончаний, особенно малофигурных, человек значительно уступает ему. Существенно, что при исследовании тех или иных видов эндшпиля используются не игровые программы, а специально разработанные. При этом машины, продвигая вперед теорию, порой удивляют своими уникальными находками. Программа позволяет дать всем окончаниям данного типа однозначные оценки – выигрыш одной из сторон или ничья, т.е. анализ является исчерпывающим и похож на доказательство математической теоремы. Но чтобы доказать «шахматную теорему», программистам приходится преодолевать массу технических трудностей.

Ниже мы рассматриваем окончания, в которых белые стремятся к победе, а черные борются за ничью. Всякий раз предполагается, что уже известны оценки всех «младших эндшпилей», т.е. возникающих при изменении материала (размене, взятии фигуры или превращении пешки) или, как говорят разработчики программ, при «конверсии». Полный перебор при этом не проводится, но рассматриваются все важнейшие ветви дерева (после каждого шага ранг понижается на единицу). Досконально изучены все окончания с шестью фигурами и меньше.

...В 1968 году состоялся традиционный матч Москва – Ленинград на 40 досках в два круга. При счете 39,5:39,5 оставалась одна незаконченная партия, которая и решала судьбу встречи. Ленинградец, игравший черными, имел лишнюю пешку, и в случае успеха его команда побеждала. Доигрывание длилось долго, гости уже опаздывали на поезд, и позиция была отдана на присуждение (ход черных).



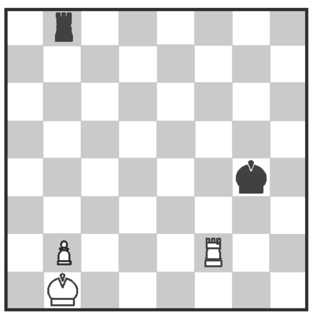
Анализом занималась авторитетная гроссмейстерская комиссия, но вся беда состояла в том, что хотя окончания *ферзь и коневая пешка против ферзя* (само собой, присутствуют и два короля, мы это нигде не добавляем) исследовались много лет, теорией тогда еще не было установлено, какие из них выиграны, а какие нет. Что касается данной позиции, то жюри в растерянности присудило ничью, матч закончился вничью, что вызвало возражение со стороны ленинградцев.

Забавный эпизод, из-за которого давняя традиция матчей Москва – Ленинград была прервана на много лет. А вот если бы компьютер разбирался в таких позициях, недоразумения не произошло бы. Вскоре программисты занялись данным эндшпилем, и в итоге были обнаружена уникальная выигранная позиция с ходом черных, в которой при наилучшей игре обеих сторон переход в младший эндшпиль происходит на 59-м ходу. Вот она:

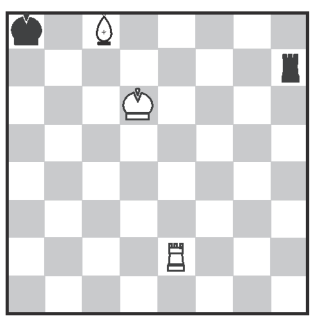
Б. ♔d6, ♕a6, ♙g7; Ч. ♔c2, ♕b1.

В дальнейшем этот вид эндшпиля был исследован с пешкой на любом поле, и, в частности, машина доказала, что приведенная выше позиция ничейна, т.е. присуждение в матче двух городов было верным!

Гораздо чаще ферзевых окончаний встречаются ладейные. Одним из наиболее распространенных и вместе с тем довольно сложных является *ладья и пешка против ладьи.* На следующей диаграмме изображена рекордная позиция. Ход черных, и соотношение сил меняется только на 61-м ходу: белая пешка превращается в ферзя.



Среди пятифигурных окончаний одно из самых интересных – *ладья и слон против ладьи.* Оно считается теоретически ничейным, но исключений предостаточно, и на практике сильнейшая сторона часто берет верх. Вот позиция, рекордная по длительности игры, в ней мат дается на 59-м ходу.



Компьютерный анализ данного эндшпиля весьма ценен для теории, но интересно и окончание *ладья и конь против ладьи*. До вмешательства машины оно было мало исследовано и считалось абсолютно ничейным. Но выяснилось, что и здесь категорические оценки рискованны, а в рекордной позиции белые матуют в 33 ходов.

Четырех- и трехфигурные окончания представляют собой младший эндшпиль для соответствующих пятифигурных и, очевидно, изучены досконально. Наиболее интересны позиции *ладья против коня*. Они теоретически ничейны, но коню далеко не всегда удается убежать от ладьи. В рекордной позиции он теряется за 27 ходов:

Б. ♔c1, ♖f8; Ч. ♔a3, ♘e2.

**1. ♔d2!** Ход на соседнее поле c2 уже выпускает выигрыш. **1... ♘d4 2. ♔c3.** Ошибочно 2. ♔d3, но белым предстоит сделать еще немало единственных ходов, прежде чем они окружат коня. **2... ♘b5+ 3. ♔c4 ♘d6+ 4. ♔c5 ♘b7+ 5. ♔b6 ♘d6 6. ♖f4! ♔b3 7. ♔c5 ♘b7+ 8. ♔c6 ♘d8+ 9. ♔b5 ♘e6 10. ♖f3+ ♔c2 11. ♔c4 ♔d2 12. ♖f5 ♔c2 13. ♖f2+ ♔d1 14. ♔d3 ♘c5+ 15. ♔d4 ♘b3+ 16. ♔c3 ♔e1 17. ♖b2! ♘c5 18. ♔d4 ♘e6+ 19. ♔e3 ♔d1 20. ♖b6 ♘g5 21. ♖c6! ♘f7 22. ♖c7 ♘e5 23. ♔e4! ♘g4 24. ♖g7! ♘f6+ 25. ♔e5 ♘h5 26. ♖g5,** и конь пойман.

И в эндшпиле *ладья против слона* интересны позиции с наибольшей продолжительностью игры. Рекорд компьютера – мат в 29 ходов – в следующей позиции:

Б. ♔a4, ♖a3; Ч. ♔a8, ♗a6.

В окончании *ферзь против ладьи* в рекордной позиции ферзю удается справиться с ладьей в 31 ход. Мат слоном и конем одинокого короля требует определенного опыта, а машина установила, что это займет самое большее 33 хода – рекорд для четырехфигурных окончаний. Мат двумя слонами быстрее – достаточно 19 ходов.

А теперь – фантастический рекорд. Окончание *ладья и конь против двух коней* в общем случае выиграно за белых, а в данном примере им удается забрать одного из коней на... 243-м ходу! Даже если бы мы привели полное решение, у читателя вряд ли хватило бы терпения проверить его на доске:

Б. ♔f7, ♖g7, ♘g8; Ч. ♔b1, ♘c2, ♘c6.

Осталось сказать, что все компьютерные находки собраны в одну базу данных, разработанную Евгением Налимовым, бывшим новосибирцем, ныне сотрудником корпорации Microsoft. Эта база называется *эндшпильные таблицы Налимова*.

*Е.Гик*

# Прогулки с физикой

## Кофе с молоком ...

Однажды в прямоугольный пакет из-под молока я осторожно налил немного кипятка, плотно завинтил пластмассовую крышку и начал пакет встряхивать. И тут в моей руке пакет как будто ожил и мгновенно из угловато-прямоугольного превратился в округло-цилиндрический ...

*(Подробнее – на страницах 26–27 внутри журнала)*

Прогулки с физикой